BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXIX
E
69
NAPOLI

H. 7

Digitized by Google

60
H
106

Saggi d' Idrodinamica
relativa alle Salliere

Mechanische und Hydrodinamische

Untersuchungen

nebst

vollständiger Anwendung

auf das Maschinenwesen bei Salzwerken

von

Karl Christian Langsdorf

Hochfürstl. Hessischen Landrichter zu Mühlheim an der Ruhr; der Weltweisheit Doctor, der Hochfürstlich Hessischen und Königlich Schwedischen patriotischen Gesellschaften, der Kurfürstlichen Pfälzischen physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Lautern und der Kurfürstl. Mainzischen Akademie der Wissenschaften zu Erfurth ordentlichem Mitglied.

mit Kupfern.

Altenburg, 1782

in der Richterischen Buchhandlung.

Digitized by Google

Ihro Excellenz

dem

Reichsfreiherrn von Beust

Herrn von Neu-Stadt-Dorf- und Bergfulz; Königlich Polnischen Geheimdenrath und Kurfürstlich Sächsischen Kammerherrn, Generaldirectorn über alle Kursächsische und viele andere Salzwerke und des Maltheser St. Johanniterordens Rittern

Meinem gnädigen Herrn

träglich machen. Erlauben mir nur noch Eure Hochfreiherrliche Excellenz, mich bei dieser Gelegenheit Höchstdero fernerer gnädigster Protektion unterthänigst empfehlen und die tiefe Devotion versichern zu dürfen, womit ich ersterbe

Reichsfrei= Hochwohlgebohrner Freiherr,

Eurer Hochfreiherrlichen Excellenz

Mühlheim bei Duisburg
den 30sten März, 1782.

unterthänig= gehorsamster Knecht
Karl Christian Langsdorf.

Vorrede.

Mein vieriähriger Aufenthalt auf dem Heßiſchen Salzwerk bei Nidda, deſſen Erweiterung ich von Oſtern 1777 bis Oſtern 1781 beizuwohnen beſtimmt war, hat mir die Veranlaſſung zu gegenwärtigem Aufſatz gegeben. Ich hatte bei der dort nothwendigen Anlegung der vielen Waſſergräben, Teiche, Kunſträder, Pumpenwerke, Röhrenleitungen, Windmühlen u. ſ. w. die beſte Gelegenheit, theoretiſche Kenntniſſe mit den praktiſchen des bloßen Empirikers verbinden zu lernen, und zugleich, was ich ſchon längſt geglaubt hatte, beſtätigt zu finden: daß Mangel einer mit Beurtheilungskraft verbundenen Theorie eben ſo oft zu Fehlern in der Ausübung verleitet, als der Mangel an Erfahrung. Aus dieſer Urſache ſuchte ich meine wenige Kenntniſſe dieſer Art durch die Käſtneriſche Lehrbücher der Mechanik und Hydrodinamik, ſoviel es mir neben meinen Haupt-

geschäften verstattet war, zu erweitern. Die schwierigsten Sätze bemühte ich mich etwas mehr zu entwickeln, auch manche der Ausübung näher zu bringen, und selbst einige zu berichtigen. Zur Entschuldigung solcher Korrektionen beziehe ich mich auf das, was Hr. Hofr. Kästner in der Vorrede zu den Anmerkungen über die Markscheidekunst sagt:

„ich habe soviel geschrieben, daß ich mehr als ein Mensch seyn müßte, „wenn mir nicht Fehler in einiger Menge entwischt wären. Manche „verbessere ich selbst, wenn es Gelegenheit giebt, meinen Zuhörern."

Ihm ist es also gewiß nicht unerwartet, wenn mir dergleichen Versehen bei dieser Gelegenheit aufgestoßen sind, und der trefliche Character dieses großen Mannes ist mir Bürge dafür, daß mir ihre Bemerkung seinen Unwillen nicht zuziehen kann. Ich habe übrigens zur Mechanik nur sehr wenig bemerkt, solche aber doch genau genug durchgegangen, um die häufigen Druckfehler gehörig sammeln zu können, die ich auch am Ende beigefügt habe. Meine Absicht war vorzüglich auf die Hydrod. gerichtet, und man wird finden, daß ich überall die Formeln recht für die unmittelbare Ausübung einzurichten mich bemüht habe. Auch habe ich manches bestimmter, als bisher geschehen ist, auszudrucken gesucht. Dahin rechne ich z. B. die nähere Bestimmung vom Werthe des Eulerschen Koefficienten bey Berechnung des Wasserstoses. Bei Untersuchung der unter- und oberschlächtigen Räder bin ich ziemlich weitläuftig gewesen, und habe über letztere noch

eine

eine besondere Betrachtung am Ende dieses Buchs beigefügt, die hoffentlich Niemanden misfallen wird. Tritträder sind ein vorzügliches Mittel, da wo es an Wasser fehlt, Bewegungskräfte zu erhalten, daher ich mich auch bei solchen gerne lange aufgehalten habe, weil sie ohnehin andere Schriftsteller gewöhnlich, nur beiläufig berühren. Die Formeln für die Saugwerke habe ich aus des Hrn. Hofr. Karstens Lehrbegr. der gesammten Mathem. entlehnt. Er hat sie zwar zum Theil in seiner Preisschrift über die vortheilhafteste Anordnung der Feuersprützen in etwas abgeändert; weil aber diese Abänderung doch nur auf so scharfe Rechnungen abzweckt, als bei denen Anwendungen, die man gewöhnlich davon macht, nicht gesucht werden kann, so habe ich es für dienlicher erachtet, sämmtliche die Saugwerke betreffende Formeln, aus einem einzigen Buche das zugleich bekannter ist, zu nehmen. Zur Ueberzeugung von der Brauchbarkeit aller dieser Lehren, habe ich eine ausführliche Anwendung auf die Bewegungskräfte auf Salzwerken hier mit beigefügt, die aber auch ausserdem von vielfältigem Gebrauch ist. Ich hätte dabei Gelegenheit gehabt, etwas von der vom Hrn. Kammerrath Schrader angegebenen Maschine zur Betreibung der Gradirung zu erwähnen; ich habe sie aber mit Bedacht übergangen, weil das Urtheil darüber in meinen Beiträgen zur Salzwerkskunde zu gegründet war, als daß ich es ietzt hätte ändern können. Diese Erfindung wurde als eine unnütze a. a. O. von mir getadelt, und ein gewisses

Misverständnis gab Hrn. Prof. Beckmann, der sie in seiner Technologie angepriesen hatte, zu einem heftigen Unwillen über diesen Tadel Anlaß, den Er mir in der 2ten Ausgabe seiner treflichen Technologie sehr empfindlich zu erkennen gegeben hat. Seine Vorwürfe treffen mich wirklich nicht. Ohne mich weiter auf die Untersuchung der Maschine einzulassen, will ich nur soviel erinnern daß der Eigenthümer des Salzwerks zu Oldeslohe, Herr Graf von Dernath ein sehr einsichtsvoller unverdrossener Salzwerksverständiger ist, und daß Solcher die erwähnte Maschine im Jahr 1776 nur deswegen hat abreissen lassen, weil Er sie nach vielen sorgfältig angestellten Proben unnütz fand. Ich kann aber auch zu Hrn. B. eigener Rechtfertigung nunmehr hinzufügen, daß ich nach seinem eigenen Geständnis sein Urtheil a. a. O. nicht verdiene; und ich bin zufrieden damit, daß ich diesen verdienstvollen Mann iezt unter meine Freunde setzen darf.

Der Verfasser.

Einige

Einige Erläuterungen zur höhern Mechanik.

§. 1 u. 2. (K. §. 34. 35.)

Man stelle sich die Zeit in eine Menge sehr kleiner Theile, alle unter sich gleich getheilt vor, die ich der Kürze wegen Augenblicke nennen will. Ein Körper, den die Schwere niederwärts treibt, falle im

1ten	Augenblicke durch	AB
2ten		BC
3ten		CD
4ten		DE
		|
nten		MN

daß ich mir also vorstelle, in n Augenblicken fällt er durch AN

A
B
C
D
E
M
N

2. Wenn ich dieſe Augenblicke ſehr kurz annehme, kann ich mir vorſtellen, der Körper gehe durch AB mit einer Geſchwindigkeit, die er im Anfange des erſten Augenblicks bekommen hatte; durch BC mit der, welche er im Anfange des 2ten hatte, u. ſ. f. durch MN mit der, welche er im Anfange des nten hatte. Die Schwere ſtellt man ſich vor, giebt dem Körper in jedem Augenblick einen neuen Stos, alſo den erſten in A, den 2ten in B, den 3ten in C, den 4ten in D u. ſ. f. den nten in M. Jeder dieſer Stöſe vergrößert des fallenden Körpers Geſchwindigkeit gleichviel. Der erſte Stos gab dem Körper eine Geſchwindigkeit, womit er in dem erſten Augenblicke durch AB = a gienge. Behielte er dieſe Geſchwindigkeit, ſo gienge er im 2ten Augenblicke durch einen Raum, der eben ſo groß wäre. Nun aber bekommt er in B einen Stos, der ihm eine neue Geſchwindigkeit, zu der vorigen giebt, ſo groß als er ſie ſchon hatte. Alſo geht er im 2ten Augenblicke noch einmal ſo geſchwind, als im erſten, alſo durch BC = 2 a. In C. hatte er die doppelte Geſchwindigkeit und bekommt durch den dritten Stos der Schwere noch ebenſoviel dazu, als er im Anfange in A hatte; nun hat er alſo die dreifache Geſchwindigkeit mit der er im 3ten Augenblicke durch CD = 3a. Und nun mit der Geſchwindigkeit, die er in E bekommt und der 3fachen, die er zuvor hatte, im vierten Augenblicke durch DE = 4a. Und ſo in iedem Augenblick durch einen Raum, der herauskommt, wenn man a mit der Zahl der Augenblicke multiplicirt. Iſt er alſo im Anfang des nten Augenblicks in M, ſo geht er in dem nten Augenblick durch MN = n. a.

3. Folglich in n Augenblicken durch AB + BC + CD + DE · · + MN = a + 2a + 3a + 4a · · · + na = a. (1 + 2 + 3 + 4 · · · + n)

4. Aber aus Anal. endlich Gr. 89. iſt $1 + 2 + 3 + 4 \cdots + n = \frac{(n+1) \cdot n}{2}$ alſo $AN = \frac{(n+1) \cdot n}{2} \cdot a$

5. Fällt alſo ein Körper in der Zeit T, die ich aus n Augenblicken zuſammenſetze, durch die Höhe S, ſo iſt $S = \frac{(n+1) \cdot n}{2} \cdot a$ Und fällt er in der Zeit t, die aus m ſolchen Augenblicken beſteht durch die Höhe s, ſo iſt $s = \frac{(m+1) \cdot m}{2} \cdot a$

6. Folglich $S : s = (n+1) \cdot n : (m+1) \cdot m$

7. Die

7. Die Menge von s, durch die S, s, bestimmt werden, sind Trigonalzahlen. Es sind die Zahlen Alg. 730. wo aber dieser ihr Namen nicht genannt ist.

8. Also wäre die Verhältnis S : s eigentlich die Verhältnis von ein Paar Trigonalzahlen.

9. Wenn aber n, m, sehr groß sind, so ist diese Verhältnis sehr nahe $= n^2 : m^2$ Es sei z. B. $n = 1000$, $m = 10000$, so ist aus (6) $S : s = 1001 \cdot 1000 : 10001 \cdot 10000$ also sehr nahe $1000^2 : 10000^2$

10. Theilt man also die Zeit in unzählich viele unendlich kleine Augenblicke ein, so verhalten sich die Räume S, s, wie die Quadrate der Zeiten n, m;

11. Aber die Schwere wirkt ohne Zweifel unabläßig in den Körper: man kann keinen Theil der Zeit bestimmen, so klein man ihn auch bestimmen wollte, da die Schwere nur im Anfang eines Zeittheils in den fallenden Körper wirkte, den Zeittheil durch nicht, sondern erst wieder, wenn der folgende Zeittheil angeht.

12. Will man sich also dergleichen Zeittheilchen vorstellen, so muß man sie unendlich klein annehmen, also ihrer in jeder bestimmten Zeit unzählich viel setzen. So werden n, m, unendlich große Zahlen, und es gilt (10.)

13. Aus 2. erhellt, des Körpers Geschwindigkeit sei am Anfange des 2ten Augenblicks noch einmal so groß, als am Anfange des ersten, und so am Anfange des 3ten Augenblicks, 3mal so groß als am Anfange des 1ten.

4ten — 4
nten — n

Also in M nmal so groß als in A.

14. Mit der in A beschreibt er in einem Augenblick $AB = a$: also würde er mit der in M in einem Augenblick $n \cdot a$ beschreiben, folglich in der Zeit, die er brauchte, durch AM zu fallen, oder in n Augenblicken, $n \cdot na = n^2 \cdot a = K$;

Er fällt aber in dieser Zeit durch $\frac{n\,(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot a$ (5) $= S$, also ist

$$K : S = n^2 : \left(\frac{n^2 + n}{2}\right) = 1 : \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{2}\right)$$

Diese Verhältnis, weil n sehr groß ist, ist nahe bei $1 : 1\frac{1}{2} = 2 : 1$

15. Wenn ein Körper also eine gewisse Zeit braucht, durch AM zu fallen, so bekommt er in dieser Zeit durch die Wirkungen der Schwere eine Geschwindigkeit

digkeit, mit der er in gleicher Zeit den doppelten Raum durchlaufen würde, weil man nämlich in $1+n$, n unendlich annimmt (12.)

16. Weil mir diese Sätze die Gesetze fallender Körper überaus deutlich zu erweisen schienen, so habe ich sie nicht gerne weglassen wollen; es sind übrigens Hrn. H. Kästners eigene Worte, der mir solche schon vor einigen Jahren mitzutheilen die Gewogenheit gehabt hat.

§. 3. (K. 38.)

Hier bezieht sich s auf Tausendtheile eines Rhl. Fußes.

§. 4. (K. 39.)

Es versteht sich, daß hier der Widerstand der Luft noch ganz bei Seite gesetzt wird, der beträchtlicher ist, als Anfänger vermuthen. Man kann sich leicht aus den gemeinsten Erfahrungen hiervon überzeugen. Ein Regentropfen, der z. B. nur von einer Höhe von 3000 Fusen herabfiele, braucht nach denen erwiesenen Formeln zu dieser Bewegung eine Zeit $t = \frac{\sqrt{3000000}}{125} = 8 \cdot \sqrt{3} = 8.1{,}73205\ldots = 13{,}85\ldots$ Sec. Also hätte der Tropfen am Ende dieser Bewegung eine Geschwindigkeit, mit der er in $13{,}85\ldots$ Sec. $2 \cdot 3000 = 6000$ Fus, mithin in einer Sec. 433 Fus gleichförmig durchlaufen würde, und wir könnten ihn daher so wenig bemerken, wie die aus einer Flinte fahrenden Schrotkörner; das widerspricht nun offenbar der Erfahrung, und die Ursache davon liegt in der Voraussetzung, die man bei den Formeln im Buche annimmt, daß die Körper frei ohne Widerstand fallen, die in der Natur nicht statt findet. Man hat aber Mittel, auch hierin sich der Natur zu nähern.

§. 5. (K. 42.)

Ein Körper soll ꝛc. ꝛc. oder deutlicher: ein Körper soll eine Geschwindigkeit erhalten, mit der er in 3 Min. gleichförmig durch 7000 Fus gehen könnte.

§. 6. (K. 47.)

In der Natur aber ꝛc. ꝛc. Hr. Erxleben sagt in seiner Naturlehre §. 94. der Widerstand der Luft richte sich hier nach der Größe der Oberfläche des fallenden Körpers; daß aber solches unrichtig sei, erhellet daraus, weil sonsten ieder Körper allemal mit einerlei Geschwindigkeit fallen müßte, unter was für einer Lage er auch fiele, und ein Bogen Papier müßte in seiner horizontalen

talen Lage so geschwind herabsinken, wie in der vertikalen, welches doch falsch ist. Ich würde deßwegen diesen Widerstand lieber so bestimmen: er richte sich nach der Menge der Luftmasse, die der Körper aus dem Wege räumen muß, und nach der Gestalt der Oberfläche die die Luft vor sich wegstößt. Auf solche Art erhält der Bogen Papier, der in der horizontalen Lage (da nämlich seine Fläche horizontal liegt) nur um eine Tiefe, die seiner Dicke gleich ist, sinkt, schon den Widerstand, den er in der vertikalen Lage erst erhält, wann er um eine Tiefe, die seiner ganzen Länge gleich ist, herabsinkt; wenn übrigens beide sich mit einerlei Geschwindigkeit bewegten. Aber eben der erwähnte Umstand ist Ursache, daß sich der Bogen Papier in der letztern Lage weit schneller bewegt, als in der erstern.

§. 7. (K. 87.)

$g : p = f^n : y^n$. Hier bedeutet nämlich f die Entfernung von C, wo die Größe der Kraft $p = g = 1$ ist, und die Proportion fließt also unmittelbar aus der Aufgabe.

§. 8. (K. 89.)

$\frac{-o^{n+2}}{(n+1)\cdot f^n}$; nämlich eigentlich der Höhe $\frac{a^{n+2} - o^{n+2}}{(n+1)\cdot f^n}$;

weil aber $n + 1$ verneint ist, so ist $o^{n+2} = \frac{1}{0} = \infty$, also verschwindet a^{n+2} gegen o^{n+2}, und es bleibt die genannte Höhe noch $= \frac{-o^{n+2}}{(n+1)\cdot f^n}$

§. 9. (K. 72.)

Anwendungen hiervon habe ich in dem Beitrag zur Salzwerkskunde I. Probe gemacht.

§. 10. (K. 90.)

Für $v = o$ ist auch $x = o$, also $y = a - x = a$, und $ly = la$, und das verwandelt die Gleichung $v = Const - fly$ in $o = Const - fla$, und giebt daher $Const = fla$, mithin $v = fla - fly = fl\frac{a}{y}$. Gelangt nun

der Körper in C, so ist $x = a$, also $y = a - x = 0$, und $v = fl\frac{a}{0}$ $= fl\infty$, also die Geschwindigkeit unendlich, so wie der Quotient $\frac{y}{0}$ auch unendlich, nur ein Unendliches von einer höhern Ordnung wird.

§. 11. (K. 98.)

Man vergleiche die Formel $\frac{dt}{m} = -\sqrt{2f}\frac{dy : a}{\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}}$

oder $\frac{-dt}{m\sqrt{2f}} = \frac{dy : a}{\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}}$ mit der $d\,arc = \frac{ds}{\sqrt{(1 - s^2)}}$

Anal. d. Un. a. a. O. so ist dort s | arc
hier $\frac{y}{a}$ | Bog. Sin. $\frac{y}{a}$

$d\frac{y}{a} = \infty$

also $\frac{d\frac{y}{a}}{\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}} = d\,\text{Bog Sin}\,\frac{y}{a}$, aber $\frac{d\frac{y}{a}}{\sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)}} =$

$\frac{-dt}{m\sqrt{2f}} = -d\left(\frac{t}{m\sqrt{2f}}\right)$ mithin d Bogen Sin $\frac{y}{a} = -$

$d\frac{t}{m\sqrt{2f}}$ und Bog. Sin $\frac{y}{a} = -\frac{t}{m\sqrt{2f}}$ und $t = -m\sqrt{2f}$.

Bog Sin. $\frac{y}{a}$ + Const. wo sich die Const wie im Buche ergiebt. Daß übrigens diese Integralgleichungen nicht transcendentisch sind, nämlich Bog Sin. $\frac{y}{a}$ und Bog Co $\frac{y}{a}$ nicht überhaupt keinen Bogen bedeute, dessen Sin. oder

Col.

$\text{Cos} = \frac{y}{s}$ ist, sondern nur den kleinsten dieser Bogen, habe ich schon in den Erl. d. An. d. Un. erinnert.

§. 12. (K. 98.)

Hierher gehört die Stelle in dem angeführten Beitrag am Ende. Es wird nicht unnütz sein als eine Anwendung des Bisherigen, die ganze dortige Stelle herzusetzen und ihren Gebrauch näher zu erläutern.

1. Die Untersuchung betrift nämlich die Bestimmung der Bahn, in der sich die von den Dornwänden durch den Wind hinweggewehte Tröpfgen bewegen. Sie ist eine krumme Linie, zu deren näherer Kenntnis ich das Bisherige so gebrauche:

Aus (87.) ist

$$v = \frac{a^{n+1} - (a - x)^{n+1}}{(n+1) \cdot f^n}$$

also wenn man $f = a$ setzt,

$$v = \frac{a^{n+1} - (a - x)^{n+1}}{(n+1) \cdot a^n}$$

und für

$$x = a,$$

$$v = \frac{a^{n+1}}{(n+1) \cdot a^n} = \frac{a}{n+1};$$

ist also, wie ich hier der Kürze wegen allein annehmen will, die veränderliche Kraft, die den Körper nach dem Mittelpunkt zu treibt, an der Stelle, wo der Körper erst aus seiner Ruhe gebracht wird, unserer Schwere gleich, und weis man die Geschwindigkeit, hier durch v ausgedruckt, die der Körper, wenn er den Mittelpunkt erreicht, hat: so ergiebt sich aus der Gleichung $v = \frac{a}{n+1}$ die Entfernung der Stelle, wo die Bewegung anfängt, von dem Mittelpunkt, nämlich

$$a = (n+1) \cdot v$$

folglich die Zeit t, worin der Körper den Mittelpunkt erreicht, nach dem folgenden 99 §.

$$= m \sqrt{2a} \cdot \tfrac{1}{2}\pi$$
$$= m \cdot \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{2(n+1)} \cdot v;$$

Für $n = 1$ würde $a = 2v$, und

$$t = m \cdot \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{4v}$$
$$= m\pi\sqrt{v}$$
$$= \frac{1}{250} \cdot 3{,}1415 \sqrt{v}$$
$$= 0{,}01256 \cdot \sqrt{v}$$

2. Zugleich giebt die Formel

$$t = m \cdot \sqrt{2a} \cdot \mathfrak{B}\,\mathfrak{Cof.}\frac{y}{a}$$

aus der Zeit den Raum, nämlich

$$\frac{t}{m\sqrt{2a}} = \mathfrak{B}\,\mathfrak{Cof.}\frac{y}{a}, \text{ also } \mathfrak{Cof}\,\mathfrak{B}\frac{t'}{m\sqrt{2a}} = \frac{y}{a} \text{ und}$$

$$a \cdot \mathfrak{Cof.}\,\mathfrak{B}\frac{t}{m\sqrt{2a}} = y = a - x; \text{ mithin}$$

$$x = a \cdot \left(1 - \mathfrak{Cof.}\,\mathfrak{B}\frac{t}{m\sqrt{2a}}\right)$$

also hier, nemlich für

$$n = 1,$$

$$x = 2v \cdot \left(1 - \mathfrak{Cof.}\,\mathfrak{B}.\frac{t}{2m\sqrt{v}}\right) *)$$

$$= 2v\left(1 - \mathfrak{Cof.}\,\mathfrak{B}\frac{125\,t}{\sqrt{v}}\right)$$

nur darf t nicht $> 0{,}012 \ldots \sqrt{v}$ sein, damit nicht $x > 2v$ d. i. $> a$ oder auch verneint werde, wegen der Erinnerung (93.).

3. Hat der Körper den Weg x durchlossen, so ist seine Geschwindigkeit

$$c = \frac{a^{n+2} - (a-x)^{n+2}}{(n+1) \cdot a^n}$$

also

*) A. a. O. müssen S. 46. Z. 3. hiernach zween Druckfehler verbessert werden.

also hier

$$= \frac{4v^2 - (2v - x)^2}{4v}$$

$$= x - \frac{x^2}{4v}$$

4. Ein Körper, der durch unsere Schwere getrieben, frei durch AD (fig. 1.) sinkt, durchlauft in jeder Zeit t den Weg $Ab = t^2 g$; zieht ihn während dieser Bewegung eine andere Kraft in der zuvor erwähnten Verhältnis senkrecht von der Vertikallinie ab, so muß er eine krumme Linie Ac durchlaufen. Heißt man nämlich die Abscissen Ab, z; die Ordinaten bc, w; so ist Ac eine Linie, deren Natur die Gleichung

$$w = z\,v\left(1 - \frac{\text{Cos. B } 125 \cdot \sqrt{\frac{z}{g}}}{\sqrt{v}}\right)$$

oder

$$= z\,v \cdot \left(1 - \text{Cos. B } \frac{125}{\sqrt{vg}} \cdot \sqrt{z}\right)$$

bestimmt, weil $c = \sqrt{\frac{z}{g}}$ ist. Hier muß aber alles in Tausendtheilgen eines Rhl. Fußes ausgedrückt, also $\sqrt{g} = \sqrt{15625} = 125$ gesetzt werden; also hat man

$$w = z\,v \cdot \left(1 - \text{Cos. B}\sqrt{\left(\frac{z}{v}\right)}\right)$$

wo der eingeschlossene Faktor nicht > 1 werden darf.

5. Alles dieses läßt sich nun auf die Wirkung des Windstoßes, insofern solcher für sich ungeändert bleibt, auf folgende Art anwenden:

Ein Körper, den der Wind von α nach β (fig. 2.) stößt, erhält so fort eine gewisse Geschwindigkeit, welche bei anhaltenden Windstößen wächst; die relative Geschwindigkeit des Windes nimmt solchergestalt immer ab, und es muß einen Punkt β geben, wo solche $= 0$ oder die absolute Geschw. des Körpers der absoluten des Windes gleich wird. Setzt man nun die der absoluten Geschwindigkeit des Windes zugehörige Höhe $= v$, und nimmt hier β für den Mittelpunkt an, also die gerade Linie $\alpha\beta = a$, so wird die Anwendung der vorigen Sätze ganz leicht.

6. Ein durch AD frei fallender Tropfen, den der Wind von AD (fig. 1.) senkrecht abtriebe, würde seinen Weg durch die krumme Linie A c nehmen, so lange er mit dem Wind noch nicht gleiche Geschwindigkeit hätte, denn nachher wird, den Widerstand bei Seit gesetzt, die Bahn völlig parabolisch und die horizontale Bewegung gleichförmig.

7. Die Zeit die vom Anfang der Bewegung bis zu ihrer Gleichförmigkeit verfließen muß, giebt die Formel

$$t = 0,0125 \cdot \sqrt{v}$$

8. Wie die Bewegung allmählig beschleunigt wird, erhellet aus der Gleichung für x (no. 2.) mit der für c (no. 3.) verbunden; denn daraus wird

$$c = 2v \cdot \left(1 - \text{Cos. } B \frac{125 t}{\sqrt{v}}\right) - v \cdot \left(1 - \text{Cos } B \frac{125 t}{\sqrt{v}}\right)$$

die sich, wie in die Augen fällt, leicht durch den Kreis construiren läßt.

9. Sie läßt sich nämlich auch so ausdrucken;

$$\frac{c}{v} = 2 \cdot \left(1 - \text{Cos } B \frac{125 \cdot t}{\sqrt{v}}\right) - \left(1 - \text{Cos } B \frac{125 \cdot t}{\sqrt{v}}\right)$$

Hier setze man nun $y = \sqrt{\frac{c}{v}}$ und $x = 1 - \text{Cos } B \frac{125 \cdot t}{\sqrt{v}}$)

so hat man, den Halbmesser = 1 gesetzt, die gewöhnliche Gleichung für den Kreis

$$y^2 = 2x - x^2$$

Die Ordinaten dieses Kreises gäben also die zu jedem t und v gehörigen Werthe von $\sqrt{\frac{c}{v}}$, und das Quadrat jeder Ordinate mit v multiplicirt gäbe also das jedesmalige zu t und v gehörige c.

10. Wenn $B \sqrt{\frac{z}{v}} = 1,570796$ so ist dieses B 90° wie aus den Schulzischen Tafeln zu ersehen ist, also in solchem Fall

$$\text{Cos } B \sqrt{\frac{z}{v}} = \text{Cos } B\ 90° = 0$$

also in (no. 4.)

$$w = 2v$$

11. Von

11. Von da an wird nun nach (6) die Bahn parabolisch und ihre Bestimmung giebt sich aus (173.) Sobald also $\sqrt{\frac{z}{v}} > 1{,}570796$ wird muß man die bisherigen Formeln auf folgende Art gebrauchen.

Man bestimme aus (no. 4.) w für kein z, das $\sqrt{\frac{z}{v}}$ größer als 1,571 *) giebt. Will man demnoch die Stelle wissen, wo der Körper sich befindet, wenn er um eine Tiefe z gesunken ist, die den Werth von $\sqrt{\frac{z}{v}} > 1{,}571$ giebt, so berechne man erst den zu 1,571 gehörigen Werth von w, der allemal $= 2v$ ist (10.). Das zu diesem w gehörige z ist also $1{,}571^2 \cdot v$. Man nehme also auf AD ein Stück $Ab' = 1{,}571^2 \cdot v$, und die zugehörige Ordinate $b'c' = 2 \cdot v$, so hat man die Stelle c', wo der Körper anfängt, sich in einer Parabel zu bewegen. (173) Seine horizontale Geschwindigkeit ist von da an $= \sqrt{v}$, und wenn man nun in der Horizontallinie b'' c'' die Stelle c'' sucht, wo der Körper ist, wenn er weiter um die Tiefe $cd = f$ gesunken ist; so hat man die Zeit, in der er durch f sinkt $= \sqrt{\frac{f}{g}}$, also die Weite dc'', um die er sich in dieser Zeit von c' d entfernt, $= (\sqrt{v}) \cdot \sqrt{\frac{f}{g}} = \sqrt{\frac{fv}{g}}$. Nun ist aber $f = z - 1{,}571^2 \cdot v$, also $b''c'' = b'c' + dc'' = 2v + \sqrt{\left(\frac{v}{g} \cdot (z - 1{,}571^2 \cdot v)\right)}$

12. So hat man also eigentlich hier zwo Formeln

1) für z, das nicht $> 1{,}571$ ist,

$$w = 2v \cdot \left(1 - \text{Cos B} \sqrt{\frac{z}{v}}\right)$$

2) für z, das $> 1{,}571$ ist

$$w = 2v + \sqrt{\left(\frac{v}{g} (z - 1{,}571^2 \cdot v)\right)}$$

13. Er-

*) Diese Zahl statt der wahren gebraucht, wird immer Genauigkeit genug geben.

13. Ex. Es sei die der Geschwindigkeit des Windes zugehörige Höhe $v = 10$ Rhl. F. so ist, weil die Grössen hier in Tausendtheilgen eines Fuses ausgedruckt werden müssen, $v = 10000$ also $\sqrt{v} = 100$ und $t = 0{,}01256 \cdot \sqrt{v} = 1{,}256$ Sec. welches die Zeit ist, bis der Tropfen die Geschw. des Windes, daferne seine Gewalt auf den ruhenden Tropfen unserer Schwere gleich ist, erreicht. Ferner sei z aber die Höhe der Wand $= 28$ Fus also in Tausendtheilgen $= 28000$, und $\sqrt{28000} = 167{,}3$ folglich $\sqrt{\frac{z}{v}} = 1{,}673$.

14. Hier muß man also die zwote Formel no. 12. gebrauchen; sie giebt

$$w = 2 \cdot 10000 + \sqrt{\frac{v^2}{g}} \cdot \left(\frac{z}{v} - 1{,}571^2\right)$$

$$= 20000 + \frac{v}{\sqrt{g}} \sqrt{\left(\frac{z}{v} - 1{,}571^2\right)}$$

Nun ist in Tausendtheilgen eines Rhl. F.

$$g = 15625, \text{ also } \frac{v}{\sqrt{g}} = \frac{100}{125} = 0{,}8;$$

$$\text{ferner } \frac{z}{v} = \frac{28000}{10000} = 2{,}8; \text{ ferner.}$$

$$2 \log. 1{,}571 = 2{,}3961762 - 2$$
$$= 6{,}3923524 - 6$$
$$= 3{,}3923524 - 3$$

$$\text{also } 1{,}571^2 = 2{,}468$$

$$\text{und nun } \frac{z}{v} - 1{,}571^2 = 2{,}800 - 2{,}468$$
$$= 0{,}332$$

Man hat also

$$w = 20000 + 0{,}8 \cdot \sqrt{0{,}332}$$
$$= 20000 + \cdots$$

wo das fehlende Glied offenbar so klein ist, daß es gegen dem ersten für nichts zu achten ist.

Die

Demnach hat man hier

$$w = 20000 \text{ Tausendtheilgen eines Rhl. F.}$$
$$= 20 \text{ ganze Rhl. F.}$$

Soweit würde also der Tropfen durch den Wind von der Dornwand hinweggeweht werden, bevor er in der Ebene des Baßins niederfiele.

15. Sollte der Wind bei einer Geschwindigkeit von 12 bis 14 F. die Tropfen nicht über das Baßin hinausschlagen, so könnte man, weil nun $v = 3$ F. und der zweete Theil der zwoten Formel no. 12. wieder unbeträchtlich wäre,

$$w = 2v = 6 \text{ Fuß}$$

setzen. Oder das Baßin müßte wenigstens um 6 F. unter der Dornwand hervorragen.

16. Man sieht aber leicht, daß dieses nicht von allen Tropfen so gelten wird. Betrachtet man die Tropfen als kleine Kügelgen, deren größte Durchschnittsfläche etwa eine Quadratlinie betrüge, so wäre der Inhalt eines einzelnen Tropfens etwa $\frac{4}{3}$ Cub. Linien; der Inhalt der anstoßenden Luftsäule (13) aber etwa $= 1440$ Cub. Linien. Weil nun $\frac{1440}{4:5} = \frac{3600}{2} = 1800$, so erhellet, daß die an den Tropfen stoßende Luftmasse etwa 1800 mal so groß als der Tropfen ist. Ihr Stos gegen den Tropfen aber beträgt nach (Erl. der Hydrod. §. 434.) nur soviel als das Gewicht von Luftmasse, die $\frac{1800}{2} = 900$ mal so groß als der Tropfen ist, also ohngefähr soviel, als das Gewicht des Tropfens. Oder der erwähnte Windstos ist gegen Tropfen von etwa $\frac{4}{3}$ Cub. Linien unserer Schwere gleich. Von solchen gilt also die bisherige Rechnung.

17. Ich habe mit Fleis diese Rechnungen so auseinander setzen wollen, theils dadurch Sätze im Buch zu erläutern und anzuwenden, theils um in den angeführten Beitrage diese Stelle bei dieser Gelegenheit zu ergänzen.

§. 13. (K. §. 99.)

Die Zeit durch AC ist $m\sqrt{2f} \cdot \frac{1}{2}\pi$, die durch $AP = m\sqrt{2f} \cdot \mathfrak{B}\,\mathrm{Cos.}\frac{y}{a}$, also die durch $PC = m\sqrt{2f} \cdot \frac{1}{2}\pi - m\sqrt{2f} \cdot \mathfrak{B}\,\mathrm{Cos}\frac{y}{a} = m\sqrt{2f} \cdot \left(\frac{1}{2}\pi - \mathfrak{B}\,\mathrm{Cos.}\frac{y}{a}\right) = m\sqrt{2f} \cdot \mathfrak{B}\,\mathrm{Sin.}\frac{y}{a}$

§. 14. (K. §. 104.)

$$\frac{dt}{m} = \frac{-dy\sqrt{-2f^{-1}}}{\sqrt{(a^{-2}-y^{-2})}} = -dy \cdot \sqrt{\left(\frac{f^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}\right)} = -dy \cdot \sqrt{\left(\frac{2:f^{\frac{2}{3}}}{\frac{a^2-y^2}{a^2y^2}}\right)} = -dy \cdot \sqrt{\left(\frac{2a^2y^2}{f^3(a^2-y^2)}\right)} = \frac{-dy \cdot ay\sqrt{2}}{f\sqrt{f}\cdot\sqrt{(a^2-y^2)}}$$

oder $= \frac{a\sqrt{2}}{f\sqrt{f}} \cdot \frac{-ydy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$,

wo der beständige Factor von dem veränderlichen abgesondert und das Integral des veränderlichen nach Anal. d. Un. 247. $= +d\sqrt{(a^2-y^2)}$ ist.

§. 15. (K. §. 117.)

Geschwindigkeit verhält ꝛc. und wenn ausserdem die Bedingung 116. statt findet, daß nämlich ausser dem ersten Stos sonst keine Kraft weiter in den Körper wirkt.

§. 16. (K. §. 123.)

Aus 77. ist nämlich $dt = \frac{m\,dx}{\sqrt{v}} = \frac{d\,x}{250\sqrt{v}}$; diese Zahl 250 kann man aber zur Bequemlichkeit bis am Ende der Rechnung bei Seite seßen, wo man alsdann das Integral t nur mit 250 dividiren darf. Der im Buch befindliche Werth von dt giebt sich nun aus der Gleichung $dt = \frac{dx}{\sqrt{v}}$ wenn man nur aus 116 den Werth von $\sqrt{v}$ substituirt. Für $m = 1$ ist (116) $\sqrt{v} = \sqrt{c}$

$\sqrt{c} \cdot e^{-x:2k} = \frac{\sqrt{c}}{e^{x:2k}}$ also $dt = \frac{dx}{(\sqrt{c}) : e^{x:2k}} = \frac{dx \cdot e^{x:2k}}{\sqrt{c}}$

eigentlich $= \frac{dx \cdot e^{x:2k}}{250\sqrt{c}}$ und $t = \frac{2k \cdot (e^{x:2k} - 1)}{250 \cdot \sqrt{c}}$; weis man also die der anfänglichen Geschwindigkeit des bewegten Körpers zugehörige Höhe $= c$, und den Exponenten des Widerstandes, so giebt die gefundene Gleichung allemal die Zeit, worinn der Körper einen gegebenen Raum x in der widerstehenden Materie durchlaufen kann, wenn der Widerstand übrigens dem Quadrat der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportional ist.

Ex. Ein Tropfen von der Größe (§. 12. no. 16.) bekomme durch einen Stos die der Höhe 4000000 Tausendtheilchen eines Rhl. Fuses zugehörige Geschwindigkeit, man sucht die Zeit, die der Tropfen braucht, einen Raum von 4000000 Tausendtheilgen d. i. von 4000 Fusen zu durchlaufen.

Hier setze ich nach (§. 12. no. 16.) in Tausendtheilchen

$$k = 10000$$
$$x = 4000000$$
$$e = 4000000$$

also

$$\frac{x}{2k} = \frac{4000000}{20000} = \frac{400}{2} = 200$$

Das giebt

$$e^{x:2k} = e^{200}$$

mithin

$$le^{x:2k} = x : 2klc = 200 \cdot le$$

Nun ist (Erl. d. An. d. Un. S. 147.) log. Brigg. $e = 0{,}4342944809$, also log. brigg $e^{x:2k} = 86{,}85889618$;

Die hierzu gehörige Zahl ist sehr nahe

$$7226 \times 10^{83}$$

also $2k \cdot (e^{x:2k} - 1) = 20000 \cdot (7226 \cdot 10^{83} - 1)$

Ferner $\sqrt{c} = 2000$ also sehr nahe $\frac{2k \cdot (e^{x:2k} - 1)}{\sqrt{c}} = 7226 \cdot 10^{84}$

und dieß mit 0, 004 multiplicirt giebt

$$t = \frac{28904 \cdot 10^{84}}{1000} = 28904 \cdot 10^{81}$$

So eine ungeheure Zeit brauchte also der Körper durch 4000 Fuse zu laufen.

Es sei $x = 60$ Rhl. Fus also hier $= 60000$, so ist

$$\frac{x}{2k} = \frac{60000}{20000} = 3$$

$$\text{also } e^{x:2k} = e^3$$

$$\text{und } l\, e^{x:2k} = 3 \cdot le = 3 \cdot 0{,}4342944\ldots$$

$$= 1{,}3028832\ldots$$

$$= 3{,}3028832 - 2$$

$$\text{mithin } e^{x:2k} = 20{,}08, \text{ und}$$

$$e^{x:2k} - 1 = 19{,}08$$

$$\text{und } \frac{2k\,(e^{x:2k} - 1)}{\sqrt{c}} = \frac{20000 \cdot 19{,}08}{2000}$$

Dieses noch mit 0,004 multiplicirt, giebt

$$t = 0{,}7632 \text{ Sec.}$$

oder der Tropfen würde in etwa $\frac{3}{4}$ Sec. einen Weg von 60 Fusen vermöge des ersten Stoses durchlaufen. Die Tiefe v, um die er in eben der Zeit vermöge seiner Schwere sinke ist, wenn man dabei den Widerstand der Luft wie wohl verstattet ist, nicht in Anschlag bringt,

$$= (0{,}763\ldots)^2 \cdot 15{,}625$$

$$\text{Es ist aber } 2 \log. 0{,}763 = 5{,}7650490 - 6$$

$$= 0{,}7650490 - 1$$

$$\text{und } \log. 15{,}625 = l\left(\frac{125^2}{1000}\right) = 2\,l\,125 - l\,1000$$

$$= 4{,}1938200 - 3$$

$$\text{also } \log. v = 0{,}9588690$$

$$\text{und } v = 9{,}096 \text{ Rhl. Fus.}$$

Be-

Befindet sich also das erwähnte Körpergen, indem es den angegebenen Stos horizontal bekommt, 9,096 Fus hoch über einer horizontalen Ebene, so wird es weiter nicht als 60 Fuse fahren, und alsdann den horizontalen Boden erreicht haben. Befände es sich aber anfangs keine 9,09 Fuß hoch über den horizontalen Boden, so könnte es bei seiner erstaunenden Geschwindigkeit dennoch keine 60 Fus weit fahren, weil es eher den Boden erreichen würde. Wie beträchtlich der Widerstand der Luft ist, läßt sich bei diesem Ex. so übersehen.

Die dem Körpergen zuerst mitgetheilte Geschwindigkeit ist $= 2\sqrt{15,625} \cdot 4000 = 2.125 \cdot 2 = 500$ Fus. Es müßte also in der berechneten Zeit einen Weg

$= 500.\ 0,7632$

$= 381,6$ Fus

zurücklegen, und legt wegen des Widerstands der Luft nur 60 Fus zurück.

Auch erhellet hieraus, daß die Geschwindigkeit sehr schnell abnimmt; sie verliehrt aber immer nur einen Theil ihrer noch übrigen Geschwindigkeit und kann deswegen nie ganz verschwinden (117.) Etwa wie die Luftmasse in einem Gefäß beim Auspumpen unter der Luftpumpe nie ganz verschwinden kann.

§. 17. (K. §. 128.)

Wenn p und q beide unveränderlich sind ꝛc. d. h. wenn die widerstehende Materie für sich überall von einerlei Art wäre. Ein Körper, der sehr hoch aus unserm Luftkreis herabfiele, würde nahe an der Oberfläche der Erde durch Luft fallen müssen, die wegen ihrer gröſſern Dichtigkeit da weit stärker zu widerstehen vermögend wäre, als in einer beträchtlichen Höhe, wo die Luft schon um ein Merkliches dünner wäre. Für einen aus der Luft herabfallenden Körper wäre also der Exponent des Widerstandes, hier q, eine veränderliche Gröſſe, desto kleiner, je mehr sich der Körper im Fallen der Oberfläche der Erde nähert. Wann indessen die Tiefe, um die er sinkt, nicht sehr groß ist, so läßt sich aus Hrn. Hofr. Abh. vom Höhemessen durchs Barometer leicht eine ohngefähre mittlere Dichtigkeit für die Luft, durch die der Körper sinkt, angeben, die sich wohl in der Rechnung gebrauchen läſſe. Und dieses wird wohl bei dem gewöhnlichen Gebrauch, den man von den Stücken in der Artillerie macht, statt finden.

§. 18. (K. §. 173.)

Statt v ſeinen Werth geſetzt ꝛc. der ſich aus der Gleichung $2yds = grdx$ ergiebt.

Nun verwandelt ſich die Gleichung ꝛc. nämlich die $2cddy = 2gyddy - gdx^2 - gdy^2$, wenn man darin aus der Gleichung $dsdds = dyddy$ den Werth von $ddy = \frac{dsdds}{dy}$ ſubſtituirt. So wird, wenn man mit $\frac{dy}{ds^2}$ zu beiden Seiten multiplicirt,

$$\frac{2cdds}{ds} = \frac{2gydds}{ds} - gdy$$

alſo

$$(2c - 2gy) \cdot \frac{dds}{ds} = -gdy$$

und

$$\frac{dds}{ds} \text{ oder } d\log\frac{ds}{dx} = -\frac{gdy}{2 \cdot (c - gy)}$$

§. 19. (K. §. 175.)

In der Zeit ꝛc. Nämlich nach (K. 173.) in der Zeit $\frac{mx}{\lambda\sqrt{c}}$; nun iſt hier $x = AB = \frac{4\lambda\mu c}{g}$ alſo $t = \frac{m \cdot 4\lambda\mu c}{g \cdot \lambda \cdot \sqrt{c}} = \frac{4m\mu\sqrt{c}}{g}$.

§. 20. (K. §. 181.)

Es wird $DE = \frac{\mu \cdot AB}{2\lambda} - \frac{g \cdot AB^2}{4 \cdot 4 \cdot \lambda^2 c}$

$$= \frac{\mu}{\lambda} \cdot \frac{kc}{g} - \frac{g}{4 \cdot 4 \cdot \lambda^2 c} \cdot \frac{4k^2 \cdot c^2}{g^2}$$

Nun

Nun ist $\frac{kc}{g} = \frac{2\lambda\mu c}{g}$, also $k = 2\lambda\mu$,

und daher $DE = \frac{2\lambda\mu c}{g} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{2\lambda\mu}{4\lambda^2}\right)$

$= \frac{2\lambda\mu c}{g} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{\mu}{2\lambda}\right)$

$= \frac{2\lambda\mu c}{g} \cdot \frac{\mu}{2\lambda}$

$= \frac{\mu^2 c}{g}$

§. 21. (R. §. 183.)

Weil $\mu^2 + \lambda^2 = \text{Sin HAB}^2 + \text{Cos HAB}^2 = 1$; so ist $MF = \frac{\mu^2 c}{g} - y + \frac{\lambda^2 c}{g} = (\mu^2 + \lambda^2) \cdot \frac{c}{g} - y = \frac{c}{g} - y$; aber $c - gy = v$, also $\frac{c}{g} - y = \frac{v}{g}$, demnach $MF \cdot g = v$

§. 22. (R. §. 184.)

Es ist $EF = (\mu^2 - \lambda^2) \cdot \frac{c}{g}$, und $AE = \frac{2\lambda\mu c}{g}$ also

$EF^2 + AE^2 = (\mu^4 - 2\lambda^2\mu^2 + \lambda^4) \cdot \frac{c^2}{g^2} + 4\lambda^2\mu^2 \cdot \frac{c^2}{g^2}$

$= (\mu^4 + 2\lambda^2\mu^2 + \lambda^4) \cdot \frac{c^2}{g^2}$

$= (\mu^2 + \lambda^2)^2 \cdot \frac{c^2}{g^2}$ folglich

$AF = \sqrt{(EF^2 + AE^2)} = (\mu^2 + \lambda^2) \cdot \frac{c}{g}$,

$= \frac{c}{g}$, weil $\mu^2 + \lambda^2 = 1$ ist.

§. 23.

§. 23. (K. §. 186.)

Mit der Erfahrung übereingetroffen ꝛc. Nicht als wenn der Widerstand der Luft, der bei dieser Rechnung nicht in Betrachtung gezogen wird, unbeträchtlich wäre. Die ziemliche Uebereinstimmung der Erfahrung mit dieser Theorie rührt von dem zum Grund gelegten Probeschuß her, wobei die verschiedenen hierher gehörigen Grössen und Abmessungen von selbst so bestimmt werden, wie sie der Widerstand der Luft giebt, ohne daß man an solchen zu denken braucht. Indessen wirkt doch der Widerstand der Luft nicht für alle Bombenwürfe vollkommen auf einerlei Art, daher auch die angestellten Erfahrungen nicht völlig mit der paraboliſchen Theorie übereintreffen. Die wahre Bahn weicht nämlich von der paraboliſchen nicht für alle Bombenwürfe auf einerlei Art ab, und die Unvollkommenheit in der Uebereinstimmung der Erfahrung mit dieser Theorie, rührt nur von der Verschiedenheit dieser Abweichungen her, die dann doch so gar groß nicht ist, wenn gleich die Abweichungen für sich sehr beträchtlich sind. Gesammelte Erfahrungen über die verschiedenen Schußweiten und die verhältnismäßigen Ladungen der Kanonen, nebst einer kurzen Geschichte der hierher gehörigen Bemühungen findet man in der VII und VIII. Abh. I. Theils des Magazins für Ingenieurs und Artilleristen, das wir den gemeinnützigen Bemühungen, des Hrn. Geheimenraths Böhm zu verdanken haben. Auch findet man in des Herrn de la Chapelle Abh. von den Kegelschnitten, diese Theorie aufs Bombenwerfen angewandt und beurtheilt, aber ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft Ich bemerke nur noch dieses, daß die Abweichung der wahren Bahn von der paraboliſchen zunimmt:

1) Mit dem Erhöhungswinkel HAB; dadurch wird nämlich der Körper genöthigt, desto tiefer wieder zu sinken, und weil alsdann der Widerstand der Luft dem Quadrat von der Geschwindigkeit der geworfenen Kugel, die ohnehin im Sinken immer zunimmt, proportional ist; so wird dadurch der Widerstand überaus beträchtlich; selbst der Schenkel DB wird dem AD desto unähnlicher, je gröſſer DE wird, weil im ersten Schenkel der Widerstand der Luft, der sich überhaupt wie des Körpers Entfernung vom Brennpunkt MF verhält, beständig abnimmt, da er hingegen im zweeten Schenkel immer wächst (K. 145.)

2) mit der horizontalen Geschwindigkeit des geworfenen Körpers. Je größer diese ist, desto größer ist der horizontale Widerstand der Luft, und desto mehr wird also die sonst an sich gleichförmige horizontale Bewegung (K. 179.) verzögert, und daher desto unsicherer eine Voraussetzung, die bei der paraboliſchen Theorie zum Grunde liegt.

§. 24.

Digitized by Google

§. 24. (K. §. 187.)

Den Widerstand der Luft mit in Betrachtung gezogen, müßte man, k *) als bekannt vorausgesetzt, die Rechnung so führen:

Der Punkt M, den man treffen soll, ist gegeben, also weiß man AP = x, und PM; aber

$$PM = 2kl\left(\frac{n^2+1}{2}\right) - 250\,t\cdot\sqrt{gk} \text{ und } t = \frac{2k\cdot(e^{x:2k}-1)}{\mu\sqrt{c}}$$

(K. §. 140; 123.) wo $n = \sqrt{(e^{x:k}-1)} + e^{x:2k}$; also ist im Ausdruck

$$PM = 2kl\left(\frac{n^2+1}{2}\right) - 250\cdot\frac{2k\cdot(e^{x:2k}-1)}{\mu\sqrt{c}}\sqrt{gk}$$

blos $\mu\sqrt{c}$ unbekannt, und es wird

$$\mu\sqrt{c} = \frac{500\cdot k\cdot(e^{AP:2k}-1)\cdot\sqrt{gk}}{2kl\left(\frac{n^2+1}{2}\right) - PM} \quad (\odot$$

woraus gleichfalls erhellet, daß die Aufgabe unbestimmt ist; es muß nämlich entweder noch der Winkel, unter dem die Kugel geworfen wird, gegeben sein, oder die Geschwindigkeit mit der sie geworfen wird; und so ergeben sich aus ⊙ folgende zwo Hauptformeln

$$1.)\ \sqrt{c} = \frac{500\cdot k\cdot(e^{AP:2k}-1)\cdot\sqrt{gk}}{\left(2kl\left(\frac{n^2+1}{2}\right) - PM\right)\cdot\mu}$$

$$2.)\ \mu = \frac{500\cdot k\cdot(e^{AP:2k}-1)\cdot\sqrt{gk}}{\left(2kl\frac{n^2+1}{2} - PM\right)\sqrt{c}}$$

Die erste löst die Aufgabe auf:

aus der gegebenen Stelle eines Punkts, den man treffen soll und dem Winkel, unter dem die Kugel aufgeworfen wird; die Ladung oder Geschwindigkeit zu finden, mit der man sie aufwerfen muß.

Die

*) Ich nehme hier k in der Bedeutung, da es den Exponenten des Widerstandes bedeutet.

Die zwote lehrt:

aus der gegebenen Stelle des Punkts, den man treffen soll, und der Geschwindigkeit oder Ladung, mit der man die Kugel abwirft, den Winkel finden, unter dem man die Kugel abwerfen muß.

Dieß aufs Bombenwerfen anzuwenden, müßte man erst mit den verschiedenen Kugeln, deren man sich bedienen wollte, Probeschüsse vornehmen, um zu sehen, was für ein c einer gegebenen Ladung zugehörte. Nun kommt ein Körper allemal in einerlei Zeit aus dem Horizont wieder in selbigen, wenn er nur gleiche vertikale Geschwindigkeit hat, weil ihm die horizontale in dieser Bewegung gar nicht hinderlich ist; also kann man sich der Aufg. (K. 154.) hier bedienen. Man thut nämlich mit einer gewissen Ladung $\mathfrak{L}$ einen Probeschuß, und bemerkt die Zeit, bis die Kugel wieder im Horizont anlangt; Diese Zeit in die Gleichung (K. 156.) gesetzt, giebt das dortige x hier CD; und die Geschwindigkeit, mie der die Kugel abfährt, giebt sich nun durch den Ausdruck

$$\sqrt{\left(gk \cdot \left(e^{CD : k} - 1\right)\right)}$$

die sich aber auf die vertikale beziehet. Hat man nun einen Probeschuß unter dem Winkel, dessen Sin = v ist, gethan, so weiß man, daß die vertikale Geschwindigkeit beim Ausfahren sich zur gesammten Tangentialgeschwindigkeit, mit der nämlich die Kugel ihre schiefe Richtung antritt, verhält, wie v zu 1, und die gesammte Tangentialgeschwindigkeit welche die Kugel beim Ausfahren hat, giebt sich also durch den Ausdruck

$$\frac{\sqrt{\left(gk \cdot \left(e^{CD : k} - 1\right)\right)}}{v}$$

Dieses ist nun die der Ladung $\mathfrak{L}$ zugehörige Geschwindigkeit. Wenn ich nun voraussetzen darf, daß doppelte Ladung auch doppelte Gewalt hervorbringt, und die Gewalt sich wie das Quadrat der Geschwindigkeit verhält, so hat man, wenn die zu c gehörige Ladung L heißt,

$$\left(\frac{\sqrt{\left(gk \cdot \left(e^{CD : k} - 1\right)\right)}}{v}\right)^2 : c^2 = \mathfrak{L} : L$$

$$\text{also } L = \mathfrak{L} \cdot \frac{c^2 \cdot v^2}{gk \cdot \left(e^{CD : k} - 1\right)}$$

und

und so giebt sich also die in der zuvor erwähnten ersten Aufgabe erforderliche Ladung, um einen gegebenen Punkt unter einem gegebenen Winkel zu treffen,

$$L = \frac{\mathfrak{L} \cdot v^2}{\left(gk \cdot (e^{CD:k} - 1)\right)} \cdot \left(\frac{500 \cdot k \cdot (e^{AP:2k} - 1) \cdot \sqrt{gk}}{(2kl\left(\frac{n^2+1}{2}\right) - PM) \cdot \mu}\right)^2$$

$$= \frac{\mathfrak{L} \cdot v^2}{(e^{CD:k} - 1)} \cdot \left(\frac{500 \cdot k \cdot (e^{AP:2k} - 1)}{(2kl\left(\frac{n^2+1}{2}\right) - PM)\,\mu}\right)^2$$

und eben so giebt sich bei der zwoten Aufgabe aus der gegebenen Stelle, die man treffen soll, und der Ladung L der Winkel, unter dem die Kugel ausfahren muß, nämlich

$$\mu = \frac{(\mathfrak{L} \cdot v^2) \cdot \left(\frac{500 \cdot k \cdot (e^{AP:2k} - 1)}{2kl\left(\frac{n^2-1}{2}\right) - PM}\right)^2}{L \cdot (e^{CD:k} - 1)}$$

§. 25. (K. §. 196.)

noch veränderlich ꝛc. Das erhellet aus der Gleichung für k (K. 190.) und die Natur der Sache bringts auch schon mit sich.

Nun ist aber

$$k = -\frac{b^2}{4c} + b \operatorname{tang} \eta - \frac{b^2}{4c} \operatorname{tang} \eta^2 \quad (\mathfrak{A}$$

wo k eine Funktion von tang η ist; soll nun k ein Gröſstes sein, so muß sein Differential gegen dem Differential der Gröſse, wovon es eine Funktion ist, verschwinden d. i. so muß

$$\frac{dk}{d \operatorname{tang} \eta} = 0$$

sein; aber aus $\mathfrak{A}$ erhält man

$$\frac{dk}{d\,\text{tang}\,\eta} = \frac{bd\,\text{tang}\,\eta - \frac{b^2}{2c}\,\text{tang}\,\eta \cdot d\,\text{tang}\,\eta}{d\,\text{tang}\,\eta}$$

$$= b - \frac{b^2}{2c}\,\text{tang}\,\eta$$

$$= b \cdot \left(1 - \frac{b}{2c} \cdot \text{tang}\,\eta\right)$$

also

$$b \cdot \left(1 - \frac{b}{2c}\,\text{tang}\,\eta\right) = o$$

folglich auch

$$1 - \frac{b}{2c}\,\text{tang}\,\eta = o$$

$$\text{und}\quad \text{tang}\,\eta = \frac{2c}{b}$$

welches also der Werth von tang η für das größte k ist; diesen also in k gebraucht, giebt das größte

$$k = -\frac{b^2}{4c} + b \cdot \frac{2c}{b} - \frac{b^2}{4c} \cdot \frac{4c^2}{b^2}$$

$$= -\frac{b^2}{4c} + 2c - c = c - \frac{b^2}{4c}$$

§. 26. (K. §. 198.)

die Richtung also, nach welcher ꝛc. liegt daher der gegebene Gegenstand in dem Horizont des Mörsers, so ist die vortheilhafteste Richtung desselben die unter 45°. Dieses stimmt mit (K. 178.) überein. Der vorige Fall ist nämlich als ein besonderer unter dem gegenwärtigen allgemeinern begriffen.

§. 27. (K. §. 202.)

I. *Also finden die dortigen* ꝛc. Sie heißen $2vds = Prdx$ und $dv = \pm Pdy$; die erste gibt

$$P = \frac{2vds}{rdx}$$

die

die zwote mit dem untern Zeichen gebrauche, weil hier in der Figur m M C stumpf ist

$$P = -\frac{dv}{dy}$$

$$\text{also } \frac{2vds}{rdx} = -\frac{dv}{dy}$$

$$\text{oder } rdvdx = -2vdsdy$$

Nun ist $r = \frac{ydy}{dp}$ und $ds = \frac{ydx}{p}$, also

$$\frac{ydy \cdot dv \cdot dx}{dp} = \frac{-2vydxdy}{p} \text{ oder}$$

$$\frac{dv}{dp} = -\frac{2v}{p} \text{ also}$$

$$\frac{dv}{v} = -2\frac{dp}{p}$$

welches $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{Conſt}}{p}$ giebt. Demnach verhält sich die Geschwindigkeit des Körpers in jeder Stelle seiner Bahn umgekehrt, wie das Perpendikel aus dem Mittelpunkt auf die dieser Stelle zugehörige Tangente der Bahn.

§. 28. (K. §. 206.)

Die Gleichung $P = \frac{2ch^2y}{p^3r}$ dient, die Stärke der anziehenden Kraft an verschiedenen Stellen der Bahn mit einander zu vergleichen.

§. 29. (K. §. 212.)

so ist die Winkelgeschwindigkeit ꝛc. Nämlich = dem Raum durch die Zeit dividirt. Der Raum ist aber hier $M C m = dw$, und die Zeit also $dt = \frac{y^2dw}{h\sqrt{c}}$, also die Winkelgeschwindigkeit $= \frac{dw}{y^2dw : h\sqrt{c}} = \frac{h\sqrt{c}}{y^2}$

§. 30. (K. §. 214.)

II. ſo findet ſich endlich ꝛc. Nämlich

$$dx^2 = u^2 dy^2 + y^2 du^2 + 2uy\,du\,dy$$

$$dz^2 = dy^2 \cdot (1 - u^2) + \frac{u^2 y^2 du^2}{1-u^2} - \frac{2uy\,du\,dy}{\sqrt{(1-u^2)}}\sqrt{(1-u^2)}$$

alſo

$$ds^2 = dx^2 + dz^2$$

$$= dy^2 + (u^2 - u^2)\,dy^2 + \left(\frac{y^2(1-u^2)}{(1-u^2)} + \frac{y^2 u^2}{1-u^2}\right)du^2 + 2uy\,du\,dy - 2uy\,du\,dy$$

$$= dy^2 + \left(\frac{y^2 - u^2y^2 + u^2y^2}{1-u^2}\right)\cdot du^2$$

$$= dy^2 + \frac{y^2 du^2}{1-u^2}$$

mithin $ds = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{y^2 du^2}{1-u^2}\right)}$

und $p = \frac{-y^2 du}{ds\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{-y^2 du}{\sqrt{(1-u^2)}\cdot\sqrt{\left(dy^2 + \frac{y^2 du^2}{1-u^2}\right)}}$

$$= \frac{-y^2 du}{\left(\sqrt{(1-u^2)}\cdot dy^2 + y^2 du^2\right)}$$

§. 31. (K. §. 220.)

I. Der Ausdruck $P\,dy$ (214 III.) verwandelt ſich hier in $\frac{f^2}{y^2}\cdot dy$ und $\int \frac{f^2 dy}{y^2} = -f^2 y^{-1} + \text{Conſt}$; ſoll nun das Integral für $y = a$ verſchwinden, ſo wird $-\frac{f^2}{a} + \text{Conſt.} = 0$, alſo $\text{Conſt} = \frac{f^2}{a}$ und das vollſtändige Integral $= \frac{f^2}{a} - \frac{f^2}{y}$ welches alſo Y iſt (K. 214. IIII.)

III. Alſo

III. Also ist in 218 und hier ꝛc. Es ist nämlich

$$\frac{dw}{\sqrt{(B^2 - w^2)}} \text{ ꝛc.} = \frac{dw}{B\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{B^2}\right)}} = \frac{dw : B}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{B}\right)}}$$ welches mit

der Gleichung (K. 218.) $\frac{dZ : A}{\sqrt{(1 - Z^2 : A^2)}}$ verglichen, die im Buche genannten Werthe giebt. Für $y = a$ fallen x und y in der Figur zusammen, daher für diesen Fall $u = \frac{x}{y} = 1$ wird.

IIII. Nun statt y seinen Werth gesetzt ꝛc. Nämlich

$y = \sqrt{(z^2 + x^2)}$; das giebt

$$\frac{(f^2 - 2ac) \cdot x + 2a^2c}{f^2} = \sqrt{(z^2 + x^2)}$$

und quadrirt $z^2 + x^2 =$

$$\frac{(f^4 + 4a^2c^2 - 4acf^2) \cdot x^2 + 4a^4c^2 + 4a^2c(f^2 - 2ac) \cdot x}{f^4}$$

also $z^2 =$

$$\frac{4a^4c^2}{f^4} + \frac{4a^2c(f^2 - 2ac)}{f^4} \cdot x - \frac{4ac(f^2 - ac)}{f^4} \cdot x$$

für unendliche x ꝛc. weil man allemal x so groß nehmen kann, daß der drei Glieder Summe also z^2 verneint, mithin $\sqrt{z^2}$ unmöglich wird.

VI. Nämlich das letzte Glied der Gleichung in (V.) $\frac{-a^2c}{f^2 - ac}$ mit der einem Wurzel a dividirt, giebt die andere, die hier K genannt wird.

VII. Die Are ist nämlich $= AC + CB =$

$$a + \frac{a^2c}{f^2 - ac} = \frac{af^2 - a^2c + a^2c}{f^2 - ac} = \frac{af^2}{f^2 - ac}$$

X. Hier ist $v = \frac{a^2 c}{p} = \frac{a^2 c}{\left(a\sqrt{\frac{c}{c-Y}}\right)^2} = \frac{c}{\left(\frac{c}{c-Y}\right)}$

$$= \frac{c}{\frac{c}{c-\left(\frac{f^2}{a}-\frac{f^2}{y}\right)}} = c-\left(\frac{f^2}{a}-\frac{f^2}{y}\right) =$$

$$\frac{acy}{ay}-\left(\frac{f^2 y - af^2}{ay}\right) = \frac{acy+(a-y)\cdot f^2}{ay}.$$

§. 32. (K. §. 227.)

Die elliptische Fläche ist nämlich ein Kreis, dessen Durchmesser $2r$ die mittlere Proportionallinie zwischen der grossen und kleinen Axe ist. Nun ist hier die grosse Axe $= E$, die kleine $= \sqrt{EL}$, also der erwähnte Durchmesser $2r = \sqrt{(E\sqrt{EL})}$ und der hierzu gehörige Kreisumfang

$= \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{(E\cdot\sqrt{EL})}}{2}\right)^2 = \frac{\pi E\sqrt{EL}}{4}$ mithin die

$$\text{Umlaufszeit} = \frac{4\cdot\pi E\cdot\sqrt{EL}}{\frac{1}{f\cdot L}} = \frac{\pi E\sqrt{E}}{f}$$

§. 33. (K. §. 230.)

In (K. 87.) ist $v = \frac{a^{n+1}-y^{n+1}}{(n+1)\cdot f^n}$ also für $n = -2$

$$v = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{y}}{-\frac{1}{f^2}} = -\frac{f^2}{a}+\frac{f^2}{y} = \frac{f^2(a-y)}{ay}.$$

§. 34. (K. §. 232.)

V. Die ersten Sätze hier beziehen sich auf (K. fig. 12) wo $\frac{Mr}{ds} = \frac{Mr}{Mm}$ $= \text{Col } mMr$ für $Mm = 1$, also $= \text{Sin } CmM$, weil $Mrm = 90°$

§. 35.

§. 35. (K. §. 234.)

I. Hier ist a die Linie AC oder die Linie, die von C ausgezogen senkrecht durch die krumme Linie geht, und c ist die der Geschwindigkeit des Körpers in A zugehörige Höhe. CT steht auf MT senkrecht, also ist, wenn MC = y den Halbm. bedeutet, $CT = \text{Cof MCT} = \text{sin CMT} = s = \frac{CT}{MC} = \frac{p}{y}$

II. Aus (K. 220. VII.) ist $E = \frac{af^2}{f^2 - ac}$ also den Werth von ac gebraucht, giebt

$$E = \frac{af^2}{f^2 - av + \frac{af^2}{y} - f^2} = \frac{af^2}{\left(\frac{-avy + af^2}{y}\right)} = \frac{f^2 y}{f^2 - vy}$$

(K. §. 239.)

Aus $p = \frac{Ly}{2w}$ wird $p^2 = \frac{L^2 y^2}{8w^2}$, mithin

$$p^2 r = \frac{L^2 y^2}{8w^2} \cdot \frac{4w^2}{L^2} = \frac{Ly^2}{2} \text{ also}$$

$$P = \frac{\frac{2ca^2 y}{Ly^2}}{2} = \frac{4ca^2}{Ly^2}$$

wo alles ausser y beständig ist, daß sich also P umgekehrt wie y^2 verhält.

§. 36. (K. §. 243.)

Die Buchstaben v. w. d. Qu. d. E. bedeuten: verkehrt wie die Quadrate der Entfernungen.

§. 37. (K. §. 255.)

Soviel ich einsehe, ist hier ein Versehen eingeschlichen, das so zu verbessern wäre.

Die Geschwindigkeit der Erde bei A verhält sich zur Geschwindigkeit eines Körpers, die solcher durch einen Secunden langen Fall erlangt,

wie $\sqrt{10806942}5 : \sqrt{15,625}$ weil der in einer Sec. durchloffene Raum $= 15,625$ Rhl. F. ist; also wenn sich die Zahlen unter dem Wurzelzeichen auf Tausendtheilchen eines Rhl. F. beziehen sollen, eigentlich =

$$\sqrt{10806942}5 : \sqrt{15625}$$
$$= 328739 : 125 = 2629 : 1$$

Sie durchlauft also bei A in einer Sec. $2629 \cdot 31,25 = 72156$ Rhl. F.

Im Buch ist erst die Wurzel aus 10806 . . mit 1000 multiplicirt worden, da solches mit der Zahl selbst geschehen und dann erst die Wurzel gezogen werden muß, welches eine Zahl giebt, die $\sqrt{1000}$ mal kleiner als die im Buch ist.

§. 38. (K. §. 257.)

Aber sollte die unendliche Weisheit einem Körper, der eben durch seine anziehende Kraft ganze Welten in ihrer Bahn erhalten sollte, specifisch das ist in gleichen Theilen weniger anziehende Kraft mitgetheilt haben, als einem derer Weltkörper, die er regieren sollte? ich glaube nicht, daß dieser Gedanke einige Wahrscheinlichkeit hätte, und doch folgte er unmittelbar aus der Verhältnis der Dichtigkeiten der Sonne und der Erde $= 100 : 387$. Nähme man aber mit Hrn. Euler (K. 251.) die Zahl 227000 (die ich der Kürze wegen statt 227512 setzen will, da ohnehin an dergleichen Genauigkeiten hier nicht zu denken ist.) so erhielte man die Dichtigkeit der Sonne zur Dichtigkeit der Erde nahe wie $1 : \frac{1}{2}$ oder $2 : 1$, welches der Bestimmung eines solchen Körpers, wie die Sonne ist, angemessener zu sein scheint als die vorige Verhältnis.

§. 39. (K. §. 258.)

I. Es ist $Y = \int P dy$ (214. III.) also hier $= \int \frac{f^3}{y^3} \cdot dy = \int f^3 y^{-3} dy$

$$= \int \frac{-f^3 \cdot 2y^{-3} dy}{-2} = \frac{f^3 y^{-2}}{-2} = -\frac{f^3}{2y^2} + \text{Const.}$$

Man hat also wieder wegen der Voraussetzung, daß das Integral für $y = a$ verschwinden soll,

$$\Phi = -\frac{f^3}{2a^2} + \text{Const.}$$

$$\text{also Const.} = \frac{f^3}{2a^2}$$

und daher vollſtändig

$$Y = \frac{f^3}{2a^2} - \frac{f^3}{2y^2}$$

III. Es ſei $c = \frac{f^3}{2a^2}$ ꝛc. d. h. Y verſchwinde für $y = a$; denn für den Fall wird Conſt $= \frac{f^3}{2a^2}$ aber aus (214. III.) iſt Conſt $= c$ für eben die Vorausſetzung, alſo $c = \frac{f^3}{2a^2}$.

ſo kommt aus ꝛc. Nämlich aus I. iſt

$$\frac{f^3}{2a^2} - \frac{f^3}{2y^2} = c - \frac{ch^2}{p^2}$$

alſo $c = \frac{f^3}{2a^2}$ weggelaſſen giebt

$$\frac{f^3}{2y^2} = \frac{ch^2}{p^2}$$

oder den Werth von c geſetzt,

$$\frac{f^3}{2y^2} = \frac{f^3h^2}{2a^2p^2} \quad \text{alſo}$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{h^2}{a^2p^2} \text{ und das giebt}$$

$$\frac{y^2h^2}{a^2} = p^2$$

$$\text{mithin} \quad p = \frac{hy}{a}$$

und der Winkel, den die Tangente mit der krummen Linie macht $\frac{p}{y} = \frac{h}{a}$ einer beſtändigen Größe.

§. 40. (K. §. 258.)

Hiermit vergleiche die Anm. in den Erl. über die Anal d. Unendl. 510.

Zweeter Abschnitt.

§. 41. (K. §. 8.)

$r = \frac{Mv^2}{mv} = \frac{ds^2}{mv}$ also ꝛc. Es ist nämlich dieser Verlust $= \frac{mv^2}{2Mv^2} \cdot c$; weil nun $r = \frac{Mv^2}{mv}$ so hat man $mv = \frac{Mv^2}{r}$, also der genannte Verlust

$$= \frac{\left(\frac{Mv^2}{r}\right)^2}{2Mv^2} \cdot c = \frac{Mv^2}{2r^2} \cdot c = \frac{c\,ds^2}{2r^2}$$

§. 42. (K. §. 17.)

Der ganze Druck ist aus (K. 11).

$$= \frac{p\,dy}{ds} + \frac{2v}{r}$$

aber aus (K. 11.) ist $v = b - \int p\,dx$, und hier aus (K. 17.) $r = \frac{-ds^3}{dx \cdot ddy}$ also der völlige Druck senkrecht auf den Weg der Bewegung

$$= \frac{p\,dy}{ds} + \frac{2 \cdot (b - \int p\,dx)}{\frac{-ds^3}{dx \cdot ddy}}$$

$$= \frac{p\,dy\,ds^2 - 2 \cdot (b - \int p\,dx) \cdot dx \cdot ddy}{ds^3}$$

§. 43. (K. §. 20.)

und der Druck ist ꝛc. Es ist nämlich

$y = \sqrt{(s^2 + x^2)} = \sqrt{(s^2 - n^2 s^2)} = s\sqrt{(1 - n^2)}$ aber $\sqrt{(1 - n^2)}$ ist der Sin. des Winkels bei A, also $= \frac{PM}{AM}$ mithin der Druck

$$= g \cdot \frac{PM}{AM}$$

§. 44.

§. 44. (K. §. 21.)

Nämlich

$$\text{Zeit durch AP} : \text{Z. d. AM} = 2\sqrt{\frac{AP}{g}} : 2\sqrt{\frac{AM^2}{g \cdot AP}}$$

$$= \sqrt{\frac{AP \cdot g \cdot AP}{g \cdot AM^2}} : 1$$

$$= \frac{AP}{AM} : 1 = AP : AM$$

§. 45. (K. §. 22.)

Man darf sich nur aus K ein Perpendikel auf MP gedenken, so ist alles wie (K. 20.)

§. 46. (K. §. 24.)

VII. Das Sphäroid muß nämlich hohl sein, und an irgend einen Punkt der inwändigen Fläche der schwere Körper gelegt werden.

VIII. Anm. s. die Druckfehler. Der Körper würde bei einer kleinern Geschwindigkeit nicht Schwungkraft genug haben, um an der innern Fläche eines auf seine Spitze senkrecht gestellten ausgehohlten Kegels herumlaufen zu können; er müßte also in seiner Bewegung immer sinken, und seine Bahn würde sich also an der innern Kegelsfläche um die Axe herum wie ein Schraubengang hinabschlängeln. Je weniger nun der Körper bei einem iedesmaligen Umlauf sänke (d. i. je weniger die Höhe c von der $\frac{r^2}{2a}$ verschieden wäre) desto näher käme die umloffene Fläche einer elliptischen Ebene, da sie eigentlich eine gekrümmte aus unendlich vielen Stücken sehr wenig von einander verschiedener Ellipsen zusammengesetzte Fläche ist. Der Faden im Buch vertritt die Stelle der Wand des erwähnten Kegels; er verhindert nämlich wie diese den Körper, senkrecht zu fallen.

Wäre abcda (hier fig. 1.) der Kreis vom Halbm. PM und man verlängert AP in m, daß $mP = \frac{MP^2}{AP}$ wird, und gedenkt sich nun den hohlen Kegel mabcda, so wird dessen Wand die Stelle des Fadens AM vertreten.

XIIII. Man hat aus Hrn. Lamberts Zuſätzen ꝛc. S. 151.

$$\log \text{brigg. } \pi = 0{,}49714987$$

$$\log \pi^2 = 0{,}99429974$$

$$\log \frac{1}{\pi^2} = -0{,}99429974$$

$$\log 10000 = 4{,}00000000$$

$$\log \frac{10000}{\pi^2} = 3{,}00570026$$

Die hierzu gehörige Zahl iſt

$$\frac{10000}{\pi^2} = 1013 \text{ alſo}$$

$$\frac{10000}{2\pi^2} = 506{,}5 \text{ und}$$

$$\sin \beta = \frac{1}{2\pi^2} = 0{,}05065 \ldots$$

welches $\beta = 2^\circ 54'$ giebt

Dieß gäbe ſich auch ſo:

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183 \ldots$$

$$0{,}3183 \ldots$$

$$9 \ldots$$
$$254 \ldots$$
$$318$$
$$9549$$

$$\frac{1}{\pi^2} = 0{,}10131 \ldots$$

alſo $\frac{1}{2\pi^2} = 0{,}05056 \ldots$ wie vorhin.

XVII.

XVII. 5mal so groß ꝛc. heißt nämlich die der Geschwindigkeit in B zugehörige Höhe c; so ist die Schwungkraft in B $= \frac{2c}{r}$, aber c ist wenigstens $= \frac{5}{2}r$, also die Schwungkraft wenigstens $= \frac{2}{r} \cdot \frac{5}{2}r = 5$, wovon die Schwere die Einheit ist.

§. 47. (K. §. 30. S. 195.)

so kommt ꝛc. Man erhält nämlich

$$M = -\frac{1}{n} = \frac{2\cdot(n-1)\cdot 2\cdot(n-2)\cdot 2\cdot(n-3)\cdots 6\cdot 4\cdot 2}{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\cdots 7\cdot 5\cdot 3} \times -mb^{n-2};$$ also

$$m = \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot(2n-5)\cdots 7\cdot 5\cdot 3}{2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdot(2n-6)\cdots 6\cdot 4\cdot 2} \quad (\natural)$$

Nun ist

$$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} = mb^n \int \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}} + uz$$

gesetzt worden, wo z durch die endliche Reihe

$$z = A + Bx + Cx^2 \cdots + Mx^{n-1} + Nx^n$$

die nämlich beim Koëfficienten $M = -\frac{1}{n}$ abbricht, und mb^n aus der Aufgabe und der Gleichung ($\natural$) gegeben ist; folglich ist nur noch die Entwickelung des summatorischen Faktors $\int \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ oder $\int \frac{dx}{u}$ übrig, und solcher ist, wie im Buche noch gewiesen wird, $= \mathfrak{B} \sin \frac{2u}{b}$ also durch die Quadratur des Kreises gleichfalls gegeben.

§. 48.

§. 48. (K. §. 37.)

Also die Zeit bis an die tiefste Stelle, oder von der tiefsten A zur höchsten N für unendlich kleine Bogen $= \frac{\pi\sqrt{2a}}{2\sqrt{g}} = \frac{\pi\sqrt{2}\cdot\sqrt{a}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{g}} = \frac{\pi\sqrt{a}}{\sqrt{2g}}$.
Dieß wird in 40. gebraucht.

§. 49. (K. §. 41.)

Nämlich $t = \frac{T}{1+\frac{b}{4c}} = T\cdot\frac{1}{1+\frac{b}{4c}}$. Nun giebt die neben stehende Division

$$\frac{1}{1+\frac{b}{4c}} = 1+\frac{b}{4c}\left|\begin{array}{l}1\\ 1+\frac{b}{4c}\end{array}\right| 1-\frac{b}{4c}+\frac{b^2}{16c^2}\cdots$$

$$\begin{array}{l} -b:4c \\ \hline -\frac{b}{4c}-\frac{b^2}{16c^2} \\ \hline b^2 : 16c^2 \end{array}$$

$$1-\frac{b}{4c}+\frac{b^2}{16c^2}\cdots$$

also $t = T\cdot\left(1-\frac{b}{4c}+\frac{b^2}{16c^2}\cdots\right)$

wo aber die zwote und höhere Potenzen weggelassen werden.

S. 205. die gesuchte Zahl von Sec. ꝛc. nämlich für einen Tag oder 24 Stunden.

§. 50. (K. §. 42.)

Das ist nämlich die Zeit für die Bewegung durch E A oder den halben Hin- oder Hergang, also für den vierten Theil des Schwungs.

§. 51. (K. §. 48.)

d. h. ieder Schwung des Pendels von der Länge f dauert $\sqrt{\frac{f}{a}}$ Secunden; es ist nämlich, wenn die Zeit für des Pendels a Schwung 1 und für des Pendels f seinen t heist, aus (K. 43.)

$$1 : t = \sqrt{a} : \sqrt{f}$$

$$t = \sqrt{\frac{f}{a}}$$

§. 52.

§. 52. (K. §. 49.)

Wie es mir vorkommt, müßte es hier so heisen:

Aus (37) ist für den halben Schwung des

Pendels a die Zeit $= \pi\sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}$

Pendels h " " $= \pi\sqrt{\left(\frac{2h}{k}\right)}$

Beide sollen aber Secundenpendeln sein, also ist

$$\pi\sqrt{\frac{2a}{g}} = \pi\sqrt{\frac{2h}{k}} \text{ oder}$$

$$\frac{a}{g} = \frac{hl}{k}$$

folglich $hg = ak$

und $h = \frac{ak}{g}$, oder für $g = 1$,

$h = ak$

Ist nun auf der Oberfläche der Sonne $k = \frac{1000}{4}$ so wird die Länge des Secundenpendels daselbst $= a \cdot \frac{1000}{4^1}$ also aus (K 45.) $= 3{,}1661 \cdot \frac{1000}{4^1} = 77{,}221$.

§. 53. (K. §. 50.)

In den Sätzen (K. 24.) ist nämlich $g = 1$ gesetzt worden.

§. 54. (K. 54.)

Hr. Hofr. K. hat 1778. einen hierher gehörigen Aufsatz unter dem Titel: „Ueber die Aenderung des Ganges der Pendeluhren im Sommer „und im Winter" bei Rosenbusch zu Göttingen drucken lassen. Er ist aber, wie bei dergleichen einzelnen Aufsätzen gewöhnlich ist, nicht so allgemein geworden, als er es verdiente. Dem Hrn. H. wird es wohl nicht misfällig sein, wenn ich solchen hier einschalte.

1. Daß Pendeluhren ihren Gang bei wärmerer oder kälterer Witterung ändern ist bekannt. Auch sind deswegen Uhren, bei denen am gleichförmigen Gang viel gelegen war, sorgfältig in einem bestimmten Grad der Wärme erhalten worden, den man nach angebrachtem Thermometer bemerkte. So verhielten sich die Französischen Astronomen, die den Grad des Meridians durch den Polarkreis massen. *)

2. Ich will ietzo einige Erfahrungen erzählen, wieviel sich der Gang einer Pendeluhr, bei den uns gewöhnlichen Aenderungen der Wärme im Sommer, und Kälte im Winter, ändert. Grade des Thermometers gebe ich ebendeswegen nicht allemal an, weil ich nur diese allgemeine Kenntnis erläutern will. Sie dienten auch Niemanden als dem, der eben die Uhr brauchte, für die sie angegeben würden.

3. Die Vergleichung der Zeit der Uhr mit mittlerer Zeit, pflege ich bei den Beispielen, der ich mich hier bediene, wo ich Mittage brauchte, nicht Durchgänge von Fixsternen, folgendergestalt anzustellen.

4. Ich bemerke, was die Uhr einen Mittag weist, und was sie den nächsten oder sonst einen der folgenden weist. Der Unterschied giebt, wieviel, soviel wahre Tage als zwischen beiden Mittagen verflossen sind, in Zeit der Uhr betragen.

5. Ein astronomischer Calender giebt mir für beide Mittage mittlere Zeit am wahren Mittage; und dieser Zeiten Unterschied lehrt mich, wieviel diese wahre Tage in mittlerer Zeit betragen.

6. So giebt sich (4. 5.) eine Gleichung zwischen der Zeit der Uhr und der mittleren, wo man eigentlich so verfahren müßte wie III. astr. Abh. 54. IIII; da aber die Zeit, welche die Uhr anzeigt, doch nicht viel von mittlerer unterschieden ist, so kann man ohne merklichen Fehler ein paar hundert Secunden der Uhr, so viel mittlern gleichgültig setzen.

7. Ex. Eine Uhr wies 1773. am Mittage
den 4. Jan. 12 h. 10′ 23″,5
19. 12 17 4,5

Also betragen diese 15 wahre Tage in der Zeit der Uhr 15. 24 Sk. + 40″.

In Eph. Vienn. 1773. ist mittlere Zeit am wahren Mittage
den 4. Jan. 0 h. 5′ 45″,6
19. 0 11 27,3

Diese

*) Maupertuis; Figure de la terre L. 3. ch. 2. art. 4.

Diese 15 wahren Tage betragen also 15 mittlere + 321″,7.

Dividirt man beide Ausdrücke mit 15 und bringt die Secunden auf eine Seite, so kömmt:

24 St. der Uhr = 24 mittl. St. — $\frac{79'',3}{15}$; der Bruch ist 5″,2.

8. Ist die Uhr zwischen ein Paar nicht unmittelbar nach einander folgenden Mittagen nicht durchaus gleichförmig gegangen, so ist sie einen Tag geschwinder den andern langsamer gegangen, und im Ganzen läßt sich doch so ihr Gang zu einer Jahreszeit, mit dem zu einer andern, vergleichen. Uebrigens schreibe ich Decimaltheile von Secunden mit hin, weil die Rechnung sie leicht angiebt, ohne zu behaupten, die Beobachtung gehe bis auf sie.

9. Die Uhr, von der ich zuerst Proben geben werde, ist eine von zwo ähnlichen, die Hr. Kampe vor vielen Jahren verfertigt hat. Sie steht beim Mauerquadranten.

10. Von dieser Uhr waren 24 Stunden so groß, als

24 mittl. St. +	3″, 36;	1772;	22 = =	25 August.
—	18, 26	1773;	4 = =	19 Jan.
+	3, 25		10 = =	13 Aug.
—	23, 3	1774;	8 = =	11 Jan.
—	26, 2		11 = =	12

11. Im Jänner 1774. zeigte das Thermometer um die Mittage etwa 5 bis 3 Fahrenheitische Grad.

12. Also betragen 24 St. der Uhr im Aug. ohngefähr 20 bis 30 Sec. mehr als im Jänner.

13. Die Uhr geht also innerhalb eines Tages im Sommer ohngefähr $\frac{1}{2}$ einer Minute langsamer als im Winter.

14. Ausser diesen Aenderungen von Wärme und Kälte, geht sie viele Tage nach einander gleichförmig, besser als manche Uhren, die auswärtige Astronomen brauchen (III. astr. Abh. 363.)

15.) Von des Königs Gnade besitzt das Observatorium eine Uhr mit so genannten rostförmigen Pendel (gridiron pendulum) wie Hr. de la Lande Astron. Liv. XIII. und *Musschenbræck* Introd. in philos. nat. §. 675. beschreiben. Ihr Verfertiger Shelton hat sie Regulator genannt, ein Namen, den eigentlich das Pendel an jeder Uhr verdiente.

Digitized by Google

16. Hier ist der Gang dieser Uhr zu eben den vorhin angezeigten Jahreszeiten. Von ihr waren 24 St. so groß als

24 mittl. St. —	3, 87	Sec.	1772;	20	28 Aug.
	5, 20		1773;	4	19 Jan.
	3, 116			10	13 Aug.
	2, 996		1774;	8	11 Jan.
	2, 2			11	12

17. So wären 24 St. dieser Uhr im Jänner 1773. um 2, 1 Sec. kleiner als im August eben des Jahrs. Diese Aenderung wäre an sich schon sehr wenig beträchtlich gegen die von 20 Sec. in (10.) Es könnte aber auch wohl sein, daß ich bei Angabe der Zeit der Uhr im Jänner was versehen hätte, oder der Uhr in dieser Zeit eine Stöhrung von einer zufälligen Ursache widerfahren wäre. Was ich von den Mittagen des Jänners aufgeschrieben, und wie ich solches gebraucht, zeigt das Ex. (-) Zwischen den Zahlen des Jänners 1774. und des Aug. beträgt der Unterschied nur etwa 1 Sec. Und so habe ich die Aenderung des Ganges dieser Uhr, wenn an ihr selbst nichts geändert worden, höchstens ein Paar Sec. gefunden.

18. Die Beobachtungen (10.) bestätigen Hr. de la Lande Ausspruch Astron. 1971. I. Ausg. 2462 II. Ausg eine gewöhnliche Uhr im Sommer nach mittlerer Zeit gestellt, gehe im Winter in einem Tag 20″ geschwinder.

19. Hr. Lambert wollte dieses nicht glauben, (vom Gang der Pendeluhren, Berliner Ephemeriden für 1776. Samml. 215. S.) weil alsdann eine Uhr bei strenger Kälte in einem Monate 10 Minuten nach und nach voreilen würde oder bei mittlern Laufe der Witterung in einem halben Jahre um 20 Minuten zu frühe gehen müsse; über welche so merkliche Ungleichheit, man sich schon lange aufgehalten hätte, wenn sie vorhanden wäre.

20. Dieses Voreilen (wenn es auch statt fände) würde doch dem Astronomen zum gewöhnlichen Gebrauch nicht sehr beschwerlich fallen. Ich wenigstens brauche nur zu wissen, was die Uhr den Mittag vor einer zu beobachtenden Himmelsbegebenheit, und den Mittag darauf gewiesen hat. Wieviel Minuten mehr oder weniger sie weist als etliche Tage zuvor, das ist mir gleichgültig, ausser zu einem solchen Gebrauche wie ich eben ietzt davon gemacht habe. Nur, wenn man die beiden nach einander folgenden Mittage nicht beobachten kann,

kann, muß man der Uhr einige Tage lang einen gleichförmigen Gang wünschen. Und wenn sie den sonst hat, so folgen doch, ausserordentliche Vorfälle ausgenommen, Aenderungen der Wärme und Kälte nicht so plötzlich auf einander, daß sie ihn merklich ändern sollten.

21. Den Leuten, die Uhren nur zum Aufputzen der Zimmer haben, pflegt der Uhrmacher sie aufzuziehen und zu stellen, oder sie stellen solche selbst, wie natürlich, nach der Stadtuhr. Und so würden sie die Aenderungen, die Hr. L. rügt, nicht wahrnehmen, wenn sie auch gleich ihren Uhren nicht einheitzen liesen.

22. Da das Pendel den Gang der Uhr regiert, so sucht man in ihm vornähmlich die Ursachen ihres veränderten Ganges. Zwo dergleichen sind umständlich bekannt.

23. Die erste ist: Das Pendel geht langsamer, wenn es länger, geschwinder, wenn es kürzer wird.

24. Da sich Metalle von Wärme oder Kälte ausdehnen oder zusammenziehen, so muß die gewöhnliche Pendelstange im Winter kürzer sein, also ihre Schwingungen in kürzerer Zeit machen und so der Uhr einen schnellern Gang verstatten.

25. Die Länge eines Uhrpendels ist eigentlich der Abstand seines Mittelpunkts des Schwunges von dem Punkt, um den es sich schwingt.

26. Diese Länge liese sich aus Gewichten und Abmessungen der Pendelstange und Linse berechnen.

27. In der Ausübung hat man diese Mühe nicht nöthig, weil man weis, daß diese Länge etwas weniges mehr beträgt, als die Länge des einfachen Pendels, das mit dem Uhrpendel gleiche Zeiten schlüge, desto weniger mehr, ie mehrmal das Gewicht der Pendelstange in der Linse ihrem enthalten ist (s. unten III. Abschnitt K. 35.) Und gewöhnlich ist die Linse vielmal gröser als die Pendelstange, und stellt die Linse nach dem beim Gebrauch, wenn es nöthig ist, genauer, durch die unter ihr befindliche Schraube.

28. Nach Gründen, die hier (K. §. 43.) angezeigt sind, läßt sich aus der Zeit, welche die Schläge eines Pendels angeben, seine Länge berechnen, oder mit der Länge eines andern vergleichen.

29. So finde ich, daß das Pendel der Kampiſchen Uhr (10.) den 11 • • 12 Jan. 1774. um 0,2671 Pariſer Linien *) kürzer geweſen iſt, als das einfache Secundenpendel, wenn man das letztere mit Hugen $= \frac{881}{288}$ Pariſ. Fus ſetzt. (Horol. oſcillat. P. IIII. Prop. 25.)

30. Auch Hr. de la Lande 1971. Aſtron. I. Ausg. 2462 II. Ausg. giebt die Verkürzung des Uhrpendels zwiſchen Winter und Sommer ohngefähr $\frac{1}{7}$ Par. Linie an.

31. Der hauptſächlichſte Unterſchied zwiſchen dem Regulator und einer gewöhnlichen Uhr beſteht in der Vorrichtung der Pendelſtangen. Bei der ſeinigen ſoll die Aenderung, die Wärme oder Kälte in ihr machen, durch den Roſt, in welchem ſie aufgehenkt iſt, aufgehoben werden. Vielleicht läßt ſich das

*) Wenn man Zwölftheile oder auch Zehntheile eines Zolls durch den Namen: Linien andeuten will, nennt man den Fus, dem ſie zugehören. Es giebt Schriftſteller, die ſich genau auszudrucken glauben, wenn ſie lineas mathematicas angeben. Da nun ſo ziemlich alle Linien in mancherlei Bedeutungen des Worts mathematiſch ſind, ſo iſt das ein nichtsſagender Pleonasmus. Freilich, wenn die Groſſen ſehr geringe ſind, z. E. Dicken eines Holzſpänngens, wäre es ſehr gleichgültig, ein Paar Pariſer oder Rhl. Linien zu nennen. Alſo wäre es da genug, Linien zu ſagen.

Bei der Gelegenheit ſei mir eine Ausſchweifung verſtattet, wie man ſie einem Criticus gern verzeiht, der eine Veranlaſſung ergreift, ganz unerwartet eine Stelle zu emendiren In Hrn. Krünitzens ökonomiſcher Encyclopädie X Th. Berlin 1777. unter dem Worte: Elle 744 S. ſteht:

„Die Pariſer Elle zu Leinwand, welche hie zu Lande ein Stab genannt „wird, enthält 3 Fus 7 Zoll 8 Linien oder 5240 Linien — Nicht, wie „in Hrn. Ludovici Kaufmannslexicon mit Worten ausgedruckt ſteht, 524 „Linien."

Nun aber findet ieder, der mit 12 multiplicíren kann, 3 F. 7 Z. 8 L. = 524 Linien. Alſo hat Ludovici recht, und es ſieht beinahe aus, als hätte Hr. Kr. ſeine Ziffern etwa aus Cruſens Comtoriſten oder einem andern Buche genommen, wo die Gröſſen in Linien und Zehntheilen der Linie angegeben ſind, und nicht daran gedacht, daß die niedrigſte Ziffer, die noch dazu durch ein Merkmal von den andern pflegt abgeſondert zu werden, Zehntheile bedeutet. A.

— Ich denke nicht, daß dieſe Bemerkung ſo ganz unrecht hier ſteht. Ich kann aber überdas noch hinzuſetzen, daß es gar nicht Hrn. Hofr. K Abſicht iſt, Krünitzen zu tadeln, ſondern den von Krün. mit Unrecht getadelten Lud. zu rechtfertigen. L.

das nicht mit geometrischer Schärfe bewerkstelligen, aber schon durch eine Näherung hat man was gewonnen.

32. Ist nun, der Erfahrung (16.) gemäß, die Aenderung seines Ganges im Winter und im Sommer, gegen die ähnlichen Aenderungen einer andern Uhr sehr wenig beträchtlich; so beweist dieses wohl, daß diese Aenderungen bei der gewöhnlichen Uhr von Aenderungen der Länge des Uhrpendels herrühren; denn nur diese Aenderungen sucht der Bau des Regulators aufzuheben, und wenn ihm das nicht völlig gelingt, wird er sie wenigstens vermindern.

33. Ein Faden an einem Ende von einem Nagel hängend, am andern mit einer Bleikugel beschwert, stellt ein einfaches Pendel dar, desto natürlicher, je mehr man das Gewicht des Fadens und den Raum, den die Kugel einnimmt beiseitesetzt, also einen Faden ohne eigenes Gewicht, nur mit einem schweren Punkte denkt.

34. Wenn dieses Pendel schwingt, so ist jeder Niedergang der Kugel von der höchsten Stelle, die sie einnimmt, bis an die niedrigste, in der Lothlinie durch den Nagel, ein Fallen wie der Niedergang eines Körpers auf einer schiefen Ebene, nur daß hier das Fallen in einem Kreisbogen geschieht. Das nächstfolgende Steigen fängt mit der Geschwindigkeit an, welche der Fall der Kugel gegeben hatte, dauert bis diese Geschwindigkeit durch die dem Steigen entgegengesetzten Wirkungen der Schwere ist vernichtet worden, und dann geht das Fallen von neuem an.

35. Ein zusammengesetztes Pendel hat nicht alle Schwere an einer einzigen Stelle, übrigens werden seine Eigenschaften aus dem einfachen hergeleitet.

36. Man kann also jedes Pendel als einen fallenden Körper ansehen, der in die Umstände gesetzt ist, daß er mit der Geschwindigkeit die ihm der Fall giebt wieder steigen muß. Die Dauer des Falls ist die Hälfte eines Schwungs, die andere Hälfte ist das Steigen.

37. Also ob das Pendel *schwer* oder *leicht* ist, ob es ein Loth oder ein Pfund wiegt, das ändert in der Geschwindigkeit seines Ganges nichts. Gienge das Pfündige schneller als das löthige, so müßte ein Pfund schneller fallen als ein Loth. Wer nicht einsehen kann, daß dieses den gemeinsten und ersten Begriffen von der Schwere widerspricht, der halte ein Paar Bleikugeln oder ein Paar Steine, so ungleich am Gewicht als er will, neben einander

und lasse beide in einem Augenblick fallen: Er wird finden, daß sie auch den Boden in einem Augenblick erreichen. *).

38. Aber die Kraft, die gleiche Theilchen Materie, gleich stark niedertreibt, die beschleunigende Kraft der Schwere, könnte stärker oder schwächer sein; alsdann würde ieder Körper schneller oder langsamer fallen, und so auch eines und dasselbe Pendel, seine Schwingungen in kürzerer oder längerer Zeit machen. Das ist die zweite Ursache von Aenderung des Ganges (22)

39. So geht ein und dasselbe Pendel näher beim Aequator langsamer, als näher beim Pole. Das Pendel behält eben die Masse; diese Masse wird näher beim Aequator, von einer schwächern Schwere langsamer getrieben. Freilich hat sie auch da weniger Gewicht. Aber weniger Gewicht schwingt sich nicht langsamer, nur deswegen weil es weniger Gewicht ist, wenn es nicht von einer schwächern Schwere getrieben wird.

40. Das Bisherige wird etwas zu Erläuterung einer Stelle, im Lauenburgischen Taschencalender 1779 beitragen, die sich daselbst 32 Seite befindet, und von Worte zu Worte also lautet:

41. „Heise steinerne oder metallene Kugeln fallen nicht durch ein Loch, „durch welches sie fallen konnten, ehe sie erwärmet wurden, weil ihr Umfang „durch die Hitze vergrössert wird. Wachskugeln, die in kalten Wasser schwim„men, sinken in warmen Wasser zu Boden, weil das warme Wasser nicht so „dicht ist, und daher nicht soviel eigenthümliche Schwere hat, als das kalte „Wasser und die Wachskugeln."

42. „Aus eben der Ursache wiegen die Körper im Sommer weniger als „im Winter, weil sie im Sommer durch die Wärme vergrössert werden und „daher nicht so dicht sind als im Winter.

43. „Weil also das Gewicht der Körper durch die Wärme vergrössert „durch die Kälte aber verringert wird, so läßt sich hieraus die Ursache einsehen, „warum die Pendeluhren und auch andere Uhrwerke im Winter geschwinder „gehen, als im Sommer, indem ein Pendel desto geschwinder sich bewegt, je „schwerer es ist."

44. So

*) Eine hiernach angestellte Probe mögte aber doch dem, der die Wahrheit des Satzes nicht schon aus andern Gründen einzusehen fähig ist, gerad das Gegentheil zu beweisen scheinen. Der oben erwähnte Widerstand der Luft wird nämlich hier allemal beträchtliche Aenderungen machen. L.

Digitized by Google

44. So weit die anzuführende Stelle.

45. Daß Körper im Sommer weniger wiegen als im Winter, gehört vermuthlich zu ganz neuen Entdeckungen in der Naturlehre, die mir noch nicht bekannt worden sind. Daß Materien im Sommer weniger eigne Schwere haben, als im Winter, das habe ich freilich vor etwas mehr als 40 Jahren von Wolfen gelernt (El. hydrost. §. 69.) der es von Eisenschmiden (de ponderibus et mensuris p. 174. 175.) gelernt hatte. Wenn dieser Angabe gemäß ein Par. Cub. Zoll Queckſilber im Sommer 7 Unzen 1 Gros 66 Gran, im Winter 7 Unzen 2 Gros 14 Gran wiegt, so heist dieses nicht, der Körper wiege im Sommer weniger, sondern die Materie sei mehr ausgebreitet, der Raum eines Cubiczolls enthalte im Sommer nicht soviel Queckſilber als im Winter. Selbst das, was von Wachskugeln angeführt wird, hat nur eben diese Meinung.

46. Eigentlich ist das Gewicht eines Körpers das wir durch Abwägen finden können, nur der Ueberschuß des Gewichts, das er im leeren Raum hätte, über das Gewicht der Luft, deren Raum er einnimmt. Und das finden wir auch nur durch den ebenso bestimmten Ueberschuß des Gegengewichts.

47. Aber die eigene Schwere der Luft ist so gering, daß alle Menschen den Verlust, den Waare und Gegengewicht in der Luft leiden, beiseite setzen. Nur Naturforscher zeigen ihn, im Kleinen, mit der Luftpumpe.

48. Und so ist kein Gedanke, daß ein Körper im Sommer merklich weniger wiegen sollte, weil er da mehr Raum in der Luft einnimmt. Auch die Luft, wenn sonst alles übrige gleich ist, z. E. bei einerlei Barometerstande, wird im Sommer dünner sein als im Winter, folglich des gröſsern Körpers Gewicht nicht so stark vermindern, als wenn sie die Dichte der Winterluft hätte.

49. Bezieht sich die Stelle (42.) nicht auf diesen, so gut als unbeträchtlichen Verlust des Gewichts in der Luft — Luft aber wird mit keinem Wort im Calender erwähnt, so ist wohl noch keinem Menschen eingefallen: ein Körper wiege weniger, wenn er nicht so dicht ist, wenn er ebensoviel schwere Theile behält, nur daß sie in einen gröſsern Raum ausgebreitet sind. Daß man sich das ganze Gewicht eines Körpers in seinem Schwerpunct beisammen vorstellt, ist doch einer der ersten Sätze, die Anfänger der Physik lernen, und wenn es in einem Punkte beisammen kann gedacht werden, so muß es sich nicht nach der Dichte des Körpers ändern.

50. Der Anfang der (43.) enthaltenen Stelle ſcheint der (42.) gerade zu widerſprechen; ohne Zweifel aber iſt es ein Verſehen des Verfaſſers oder Abſchreibers, daß vergröſſert bei Wärme, vermindert bei Kälte ſteht; verwechſelt man beide Worte, ſo ſtimmen 42; 43; überein, und dieſe Verwechſelung rechtfertigt ſich durch die Anwendung auf die Pendeln.

51. Alſo: Pendeln giengen (43) im Winter geſchwinder weil ein ſchwerer Pendel ſich geſchwinder bewegt?

52. Iſt die Kraft der Schwere im Winter ſtärker als im Sommer? Davon wird nichts geſagt. Das Pendel ſoll ſchwerer ſein, weil es dichter iſt. Es hat alſo eben die Menge von Theilen, nur enger beiſammen. Bleibt dieſe Menge ungeändert, und wirkt in ieden Theil eben die Kraft der Schwere, die im Sommer in ebenden Theil wirkte, ſo iſt ſicher, daß das Pendel nicht ſchwerer werden, auch nicht geſchwinder gehen wird.

53. Blos die Luft könnte hier in Betrachtung kommen. Sie iſt im Winter dichter. Das Pendel verliehrt in ihr von ſeinem Gewichte mehr als im Sommer, der Ueberſchuß ſeines Gewichtes über der Luft, deren Raum es einnimmt, ihres, mit des Pendels Maſſe dividirt, wäre eigentlich das, was man als die beſchleunigende Kraft der Schwere beim Pendel annehmen müßte. Aber noch Niemand hat meines Wiſſens gelehrt, dieſe, ſo beſtimmte, beſchleunigende Kraft ſei im Winter und im Sommer dergeſtalt verſchieden, daß ſich die Aenderungen des Ganges daraus herleiten lieſen.

54. Widerſtand der Luft kann freilich auch den Gang des Pendels ändern. So hat Hr Prof. Mayer zu Greifswalde die Länge des daſigen Secundenpendels im luftleeren Raum 440,894 Par. Linien, und 440,827 in der Luft gefunden. Mem. de l'Acad. R. de Pruſſe ann. 1775. Hiſt. p. 27.

55. Im Calender aber wird die Luft gar nicht erwähnt. Alſo kann die Meinung keine andre ſein als: Ein Pendel z. E. von 10 Pf. gehe geſchwinder als eines von 5 Pf. Das aber iſt wider die erſten Gründe deſſen, was man von der Schwere und von Pendeln weis. (37) Warum man des Uhrpendels Linſe ſchwer macht, wird aus (27) erhellen. Noch andere Umſtände z. E. Ueberwindung der Friktion beſtimmen in der Ausübung Gewichte, welche ſonſt die Theorie unbeſtimmt läßt.

56. Uhrpendel, die ihre Länge bei Aenderung der Wärme nicht merklich ändern ſollen, ſind ſchon längſt bekannt, ſelbſt von unterſchiedenen Vorrichtungen, auch Erfahrungen darüber wie die meinigen. Ein ſolches Pendel müßte doch auch in der Kälte dichter, daher ſchwerer werden, folglich geſchwinder gehen.

Wie

Wie vergebliche Arbeit haben sich nicht die gemacht, die für die Wärme unveränderliche Uhrpendel erfinden wollten! Den guten Leuten war gänzlich unbewußt, daß Pendel in der Kälte geschwinder gehen: weil kalte Körper dichter sind, und dichtere mehr wiegen, und schwerere Körper geschwinder gehen als leichtere. Freilich konnten sie aber auch die beiden letzten Sätze nicht wissen, denn eine Physik, die sie lehrt, soll noch gedruckt werden.

Dritter Abschnitt.

§. 55. (K. §. 2.)

Die andere beschleunigende Kraft soll nämlich z heisen, so ist, weil sich die beschleunigende Kräfte wie die Räume, wodurch sie die Körper in gleichen Zeiten treiben, verhalten wie

$$z : u = Aa : Bb$$

$$\text{also } z = \frac{Aa}{Bb} \cdot u = \frac{Aa}{Bb} \cdot \frac{mp}{q \cdot B} \quad (1.)$$

$$\text{also wenn } p : q = Aa : Bb$$

$$z = \frac{mp^2}{q^2 B}$$

§. 56. (K. §. 3.)

Man könnte das Moment einer Kraft, wovon in der Statik geredet wird, auch das statische Moment; und das Moment der Trägheit, wovon hier die Rede ist, das mechanische Moment nennen, es kommt aber unten (§. 71.) eine andere Bedeutung dieses Worts vor.

§. 57. (K. §. 17.)

S. 228. Z. 5. Gedenkt man sich nämlich das Gewicht der sämmtlichen Masse in der Entfernung a von C in einem Punct beisammen, so giebt das Product aus dem statischen Moment in die Entfernung a, das Moment der Trägheit. Dieses Moment also mit jenem dividirt, giebt die Entfernung a.

§. 58. (K. §. 56.)

Das Moment der Trägheit eines Mühlrades zu berechnen, müßte man so verfahren.

I. Das Moment der Trägheit der Welle giebt sich aus (K. 54.)

II. Die Speichen oder Arme sind rechtwinklichte Parallelepipeda, deren Momente der Trägheit sich aus 53. ergeben, die man dann zusammen addiren müßte.

III. Man berechne aus (K. 54.)

α) Das Moment der Trägheit eines Cylinders, dessen Halbmesser des Rades seiner vom Mittelpunkt der Welle bis an den äussersten Umfang des Kranzes gerechnet, und dessen Höhe oder Axenlänge die Dicke des Kranzes wäre.

β) Das Moment d. Tr. eines ähnlichen Cylinders, dessen Halbmesser aber nur bis an den innern Umfang des Kranzes reicht.

das Moment der Trägheit in β vom Mom. d. Tr. in α abgezogen, läßt das Mom. d. Tr. des einen Kranzes, das also verdoppelt das Mom. d. Tr. beider Kränze giebt.

IV. Man messe den Halbmesser des Rades vom Mittelpunkt 1) bis an den untersten, und dann 2) bis an den obersten Punkt der Schaufeln; oder mit andern Worten; 1) den Halbmesser vom innern Umfang des Kranzes und 2) den Halbm. vom äußern. Beide von einander abgezogen geben die Höhe des cylindrischen Rings, zwischen dem die Schaufeln liegen, dessen Inhalt sich, weil seine Breite als die Entfernung beider Kränze von einander leicht zu messen ist, berechnen läßt. Aus der specifischen Schwere des zu den Schaufeln gebrauchten Holzes und den Abmessungen der Schaufeln giebt sich das Gewicht, das nun mit der Anzahl der Schaufeln multiplicirt das Gewicht v der sämmtlichen Schaufeln giebt. Man setze also des vorhin erwähnten Rings seine Masse = V, und suche wie in III. sein Moment d. Tr. so hat man das M. d. Tr. der sämmtlichen Schaufeln.

Die Momente in I. II. III. und IV. zusammengerechnet, geben das Mom. d. Trägheit des ganzen Rades.

Will man das M. d. Tr. des mit der Ebene des Rades parallel laufenden Theils des Kurbelzapfens, das gegen dem Moment d. Tr. des Rades unbeträchtlich sein wird, noch besonders berechnen, so dient gleichfalls (K. 53. IX.) wo man in der Ausübung für c die halbe Länge dieses Theils annehmen kann.

Den

Den von dieſem Theil ſenkrecht abgehenden Zapfen, woran die Laſt gehängt wird, zieht man dabei nicht in Betrachtung, ſondern rechnet ihn allenfalls mit zur Laſt.

Jeder wird nun die Rechnung ſelbſt anzuſtellen im Stand ſein. Ich will nur noch mit drei Worten etwas von dem Gebrauch erinnern, der ſich von dergleichen Berechnungen beim Maſchinenweſen machen läßt. Es läßt ſich nämlich nicht iede Maſchine ſo einrichten, daß ihr Gang ſo gleichförmig wäre, als man es zu wünſchen Urſache hätte. Man iſt daher auf den Einfall gekommen, an der Axe der Hauptwelle zugleich einen Schwungkolben oder ein beſonderes Schwungrad anzubringen, das mit dem Hauptrad, wie natürlich iſt gleiche Geſchwindigkeit erhält. Fängt alsdann die Kraft an, das Hauptrad etwas langſamer zu drehen, ſo dient das in Bewegung gebrachte Schwungrad, die Gleichförmigkeit der Bewegung einige Zeit hindurch ziemlich zu unterhalten. Ich habe geſehen, daß man ſich ſolcher Schwungräder ſogar bei den Schneid- oder Holzſägmühlen bedient. Es wird natürlich ſein, dergleichen Schwungräder ſo einzurichten, daß ihre Schwungkraft nicht kleiner als ihre Schwere iſt. Alſo muß man wenigſtens berechnen können, wie groß der Halbmeſſer eines Schwungrades ſein muß, wenn ſeine Schwungkraft bei der Geſchwindigkeit, die ihm durch die Maſchine ertheilt wird, ſeiner Schwere gleich ſein ſoll. Dazu wird erfordert, daß die Entfernung vom Mittelpunkt des Schwungrades bis zum Mittelpunkt des Schwunges deſſelben, ſo groß als die Länge eines Pendels ſei, das innerhalb der Zeit, da das Schwungrad einmal gleichförmig herumgeht, einen Schwung macht d. i. einmal hin- und hergeht (ſ. Hydrodin. K. 419.) Die Zeit, in der ſolches geſchieht muß allemal gegeben ſein; ſie ſoll t heiſen; heiſt nun die Länge des Pendels, das in der Zeit t einen Schwung macht, x; ſo hat man

$$2 \text{ Sec.} : t = \sqrt{3,1661} : \sqrt{x}$$

(K. II. Abſchn. 43 und 45.), wo t in Sec. ausgedruckt werden muß. Alſo

$$x = \frac{t \cdot \sqrt{3,1661}}{2} = t \cdot 0,89 \text{ Rhl. Fuß.}$$

Richtet man alſo das Schwungrad ſo ein, daß die Entfernung von ſeinem Mittelpunkt bis zum Mittelpunkt ſeines Schwunges $= t \cdot 0,89$ Rhl. Fus beträgt, ſo iſt ſeine Schwungkraft ſeiner Schwere gleich, und weil ſeine Schwungkraft wenigſtens nicht kleiner ſein ſoll, ſo darf die gedachte Entfernung wenigſtens nicht kleiner als $t \cdot 0,89$ Rhl. Fus ſein. Es ſei der Ring

(K. fig. 34.) der Umfang des Schwungrads, und p der Mittelpunkt ſeines Schwunges, ſo iſt die gedachte Entfernung (K. 55.)

$$= \frac{\frac{B-P}{2} \cdot (OB^2 - OP^2)}{\text{Mom. ſtat. des Schwungrades}}$$

(K. 17.), oder, wenn ich OP = r und PB = d ſetze,

$$= \frac{(B-P) \cdot \left((r+d)^2 - r^2\right)}{\text{2. Mom. ſtat. des Schwungrades.}}$$

Nun habe Z die Bedeutung, wie im Beitrag zur Salzwerksk. S. 74. ſo iſt $Z = -r + \sqrt{(r^2 + rd + \frac{1}{2}d^2)}$ und das Mom. ſtat. des Schwungrades $= (B-P) \cdot (r+Z) = (B-P) \cdot \sqrt{(r^2 + rd + \frac{1}{2}d^2)}$ alſo die gedachte Entfernung

$$= \frac{(B-P) \cdot \left((r+d)^2 - r^2\right)}{2 \cdot (B-P) \cdot \sqrt{(r^2 + rd + \frac{1}{2}d^2)}} = \frac{2rd + d^2}{2\sqrt{(r^2 + rd + \frac{1}{2}d^2)}}$$

$$= \frac{rd + \frac{1}{2}d^2}{\sqrt{(r^2 + rd + \frac{1}{2}d^2)}}$$

Dieſe nun dem Werth von x gleich geſetzt, giebt

$$0{,}89 \cdot t = \frac{rd + \frac{1}{2}d^2}{\sqrt{(r^2 + rd + \frac{1}{2}d^2)}}$$

Und ſolches quadrirt giebt

$$0{,}89^2 \cdot t^2 \cdot (r^2 + rd + \tfrac{1}{2}d^2) = (rd + \tfrac{1}{2}d^2)^2$$

oder $0{,}7921 \cdot t^2 \cdot r^2 + 0{,}7921\, t^2 \cdot d \cdot r + 0{,}7921 \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2}d^2 = d^2 r^2 + d^3 \cdot r + \frac{1}{2}d^4$; oder

$(0{,}7921 \cdot t^2 - d^2) \cdot r^2 + (0{,}7921.\ t^2 d - d^3) \cdot r +$
$0{,}7921 \cdot t^2 \cdot \frac{1}{2}d^2 - \frac{1}{2}d^4 = 0$; oder

$$r^2 + dr + \left(\frac{1}{2}d^2 + \frac{d^4}{4 \cdot (0{,}7921 \cdot t^2 - d^2)}\right) = 0$$

Das

Das eingeschlossene Glied heiſe δ, so ist

$$r^2 + dr + \delta = 0$$
$$r^2 + dr + \tfrac{1}{4}d^2 = \tfrac{1}{4}d^2 - \delta$$
$$r = -\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}d^2 - \delta)}$$

wo offenbar nur das obere Zeichen hierher gehört. Es ist aber

$$\tfrac{1}{4}d^2 - \delta = \frac{d^4}{4\,(d^2 - 0{,}7921 \cdot t^2)} - \tfrac{1}{4}d^2$$

Das giebt also hier

$$r = -\tfrac{1}{2}d + \sqrt{\left(\frac{d^4}{4\,(d^2 - 0{,}7921 \cdot t^2)} - \tfrac{1}{4}d^2\right)}$$

Wenn demnach die Schwungkraft des Rades seiner Schwere gleich sein soll, so muß die Entfernung vom Mittelpunkt des Schwungrades bis an den innern Umfang seiner schweren kreisförmigen Scheibe *)

$$r = \frac{-d + d\sqrt{\left(\frac{d^2}{d^2 - 0{,}7921 \cdot t^2} - 1\right)}}{2}$$

sein. Kleiner wenigstens darf r nicht genommen werden, wenn das Schwungrad wirklich Vortheil bringen soll.

1. Ex. Wenn man an die Welle des Wasserrades bei einer Schneidmühle ein hölzernes Schwungrad anbringen will, wo die Höhe der Scheibe PB (fig. 34. K.) = 7 Rhl. Fus und das bei einem gleichförmigen Gang mit der Welle 10mal in einer Minute herumgehen soll, so ist

$$d = 7 \text{ also } d^2 = 49$$
$$t = \frac{60}{10} = 6 \text{ Sec.}$$
$$\text{und } t^2 = 36$$

also

*) Die Theile in der Oefnung, welche die kreisförmige Scheibe umgiebt und nur etwa zur Befestigung des Schwungrades dienen sollen, sehe ich hier, wie es für die Ausübung verstattet ist, beiseite.

also

$$r = \frac{-7 + 7 \cdot \sqrt{\left(\frac{49}{49 - 0{,}7921 \cdot 36} - 1\right)}}{2}$$

$$= \frac{-7 + 7 \cdot \sqrt{\left(\frac{49}{20{,}4844} - 1\right)}}{2}$$

$$= \frac{-7 + 7\sqrt{\left(\frac{28{,}5156}{20{,}4844}\right)}}{2} = \frac{-7 + 7 \cdot 1{,}183}{2}$$

$$= \frac{-7 + 8{,}281}{2} = \frac{1{,}281}{2} = 0{,}64 \text{ Rhl. F.}$$

Hier bliebe also in der Mitte der Scheibe keine gröſſere Oefnung, als etwa ohnehin um die Welle durchzustecken nöthig wäre.

2. Ex. Es sei das übrige wie zuvor, nur d = 10 Rhl. F. so wird

$$r = \frac{-10 + 10\sqrt{\left(\frac{100}{100 - 0{,}7921 \cdot 36} - 1\right)}}{2}$$

$$= \frac{-10 + 10\sqrt{\left(\frac{28{,}5156}{71{,}4844}\right)}}{2}$$

welches einen verneinten Werth giebt; d. h. wenn man auch gar keine Oefnung in der Mitte der Scheibe liese, so wäre dennoch der Schwung schon gröſser als der verlangte, und es ist also d zu groß angenommen worden.

3. Ex. Es sei d = 6, so ist

$$2r = -6 + 6\sqrt{\left(\frac{36}{36 - 0{,}7921 \cdot 36} - 1\right)}$$

$$= -6 + 6 \cdot \sqrt{\left(\frac{28{,}5156}{9{,}4844}\right)} = -6 + 6 \cdot 1732 = 4{,}392$$

Rhl. Fus.

Ich

Ich habe bisher immer mit Fleis erinnert, die Schwungkraft soll nicht kleiner, als die hier angenommene, also auch r nicht kleiner als der nur berechnete Werth von r sein. Daß aber auch r nicht gröſser sein dürfe, habe ich nicht behauptet, und getraue es nicht zu behaupten, wenn ich gleich Männer, die von ihren grossen Einsichten in das Maschinenwesen der Welt untadelhafte Beweise vorgelegt haben, für diese Meinung anführen könnte, wie die Herrn Pothem, Büsch und Mönnich *). Letzterer sagt a. a. O.

Wenn der Schwingungshalbmesser gröſser gemacht wird, so wird die Maschine davon aufgehalten, weil dem Schwungrad ein langsamerer Umlauf natürlich ist, als die Maschine eigentlich hat.

Was das heisen solle, daß dem Schwungrad ein langsamerer Gang natürlich sei als ꝛc. ist mir unverständlich. Ich denke, zu jeder Geschwindigkeit des Schwungrades wird Kraft erfordert, und je geschwinder es sich bewegen soll, desto mehr Kraft ist dazu nöthig, und jede Bewegung wird ihm also desto natürlicher sein, je langsamer sie ist. Eigentlich ist es dem Schwungrad natürlich zu ruhen. Ist aber die Maschine einmal wirklich in den Beharrungsstand gekommen, so ist die ganze dabei vom Schwungrad herrührende Wirkung nur diese, daß die Maschine um etwas weniges später in diesen Beharrungsstand gekommen ist, aber eben deswegen auch solche allemal eine kleine Zeitlang in diesem Beharrungsstand durch das Schwungrad erhalten wird. Dadurch wird der Gang der Maschine gleichförmig, allem Stocken und zitternder Bewegung vorgebeugt und eben dadurch der Effekt der Maschine vergröſsert, und ich sehe nicht, wie durch einen zu grossen Schwingungshalbmesser, der Effekt der Maschine verringert werden kann, wenn übrigens von der durch den Druck des Schwungrades vergröſserten Friktion abstrahirt wird. Ueberhaupt hat die Wahl in der Gröſse der Schwungräder ziemlich viel willkührliches. Aber die hier gewiesene Berechnungen zeigen doch allemal, was man sich im Allgemeinen von seiner Wahl zu versprechen habe.

§. 59. (K. §. 57. S. 267.)

Das Moment, womit p wegen des ihm hinderlichen q und φ das Rad zu drehen strebt, ist $(p - \varphi) \cdot a - bq$; eine bewegende Kraft also $= \frac{(p - \varphi) \cdot n - bq}{a}$ an A angebracht ist der p gleichgültig. Die gesammte

*) S. dessen Anleit. zur Anordn. u. Berechn. der gebräuchlichst. Maschinen 1 Abth. S. 62.

sammte Masse, die man nun bei der Maschine in A vereinigt annehmen kann, ist

1. Die Masse P
2. Die Masse $\frac{b^2}{a^2}Q$, weil diese an A angebracht bei einer gegebenen Bewegung der Maschine eben so wirkt wie Q an B angebracht.
3. Die Masse $\frac{M}{a^2}$, weil wieder diese bei A angebracht, für jede Bewegung der Maschine das thut, was die ausgebreiteten Theile der Maschine zusammen in ihrer gemeinschaftlichen Wirkung thun.

also überhaupt $= P + \frac{Qb^2}{a^2} + \frac{M}{a^2}$ Nun giebt die beschleunigende Kraft mit der Masse multiplicirt die bewegende (I. Abschn. III. Kap. K. 49.) oder die bewegende Kraft mit der Masse dividirt die beschleunigende, also wird die beschleunigende Kraft hier

$$= \frac{\left((p - \varphi) \cdot a - bq\right) : a}{P + \frac{Qb^2}{a^2} + \frac{M}{a^2}}$$

$$= \frac{\left(a \cdot (p - \varphi) - bq\right) \cdot a}{M + Pa^2 + Qb^2}$$

Dieß ist die Größe, die oben (I. Abschn. K. 80.) f genannt wurde.

§. 60. (K. §. 64.)

Die bei Bewegung der Maschinen am häufigsten vorkommenden Fragen, betreffen die Veränderung der Geschwindigkeit bei veränderter Kraft oder Last, und gewöhnlich geschiehet diese Beurtheilung, nach dem im Buch als falsch erwähnten Grundsatz, so daß z. B. der Mühlenarzt glaubt eine halb so grosse Last werde, von eben dem Wasser und Rad doppelt so geschwind oder eine Last

an

an einer Kurbel von doppelter Länge angebracht, werde gerad halb so geschwind als eben die Last an einer Kurbel von der einfachen Länge bewegt. Deswegen wird es nicht überflüßig sein, hier noch einige Anleitung zu Kenntnissen, die etwas näher zur Wahrheit führen, zu geben.

I. Der größte Widerstand, den eine Kraft aufzuheben vermögend ist, heiße p, so hat diese Kraft, wenn sie diesen Widerstand findet, die Geschwindigkeit $c = o$; könnte sie nämlich diesen Widerstand noch mit einer gewissen Geschwindigkeit überwältigen, so würde sie einen noch grössern Widerstand zu überwältigen vermögend sein, nur mit einer geringern Geschwindigkeit. Die größte Geschwindigkeit, die p zu erreichen vermag ist die, bei der es gar keinen Widerstand zu überwältigen hat; sie heiße v, so wird, wenn ich jeden Widerstand ausser p, Q nenne, p die Geschwindigkeit v erlangen für $Q = o$.

II. Wenn die Kraft einen Widerstand Q überwältigen soll, so wird sie solches mit einer gewissen Geschwindigkeit c thun, deren Unterschied von der größten Geschwindigkeit v, die nämlich die Kraft, wenn sie ohne allen Widerstand wäre; erreichte, desto geringer wird, je kleiner der Widerstand Q gegen dem größten p ist, dem nämlich die Kraft ohne weitere Geschwindigkeit nur gerad das Gleichgewicht zu halten vermögend ist. Das läßt sich offenbar so ausdrucken:

$$Q : p = \big((v - c) : v\big)^n$$

wo die Erfahrung den Werth von n entscheiden müßte. In der Hydrod. wird gezeigt werden, daß bei Betreibung der Wasserräder $n = 2$ gesetzt werden müsse. Und hier, wo ich nur noch drei Worte von der Wirkung thierischer Kräfte sagen werde, stimmt die Erfahrung mit der Voraussetzung $n = 2$ gleichfalls sehr wohl überein. Das gäbe also

$$Q = p \cdot \left(\frac{v - c}{v}\right)^2$$

$$= p \cdot \left(1 - \frac{c}{v}\right)^2$$

welches wirklich die Formel bei Hrn. Euler und Hrn. Hofr. Karsten (lehrbegr. der ges. Mathem. IV. Th. S. 463.) ist.

III. Bei Maschinen, die durch thierische Kräfte betrieben werden, ist diese Formel von grossem Nutzen, wenn man nur die Grössen v und p zuvor festgesetzt hat. Die größte Geschwindigkeit eines Pferdes auf ebenen Wegen setzt man auf 12 Fus in einer Sec. und eines Menschen auf 6 F also wäre für jenes v = 12 F. für diesen v = 6 F. Ein ordinäres Pferd hat auf ebenen Wegen seine ganze Kraft nöthig, um eine Last von 10 Centnern oder 1000 ℔. aus ihrer Stelle zu schieben, wo es aber nur die Friktion zu überwinden hat, und weil man solche etwa $\frac{1}{3}$ der Last schätzen kann, so wird man der Wahrheit ziemlich nahe kommen, wenn man für ein Pferd p = 330 ℔, so wie für einen Menschen p = 60 ℔ setzt. Für einen Ochsen würde ich v = 4 F. p = 380 Pfund rechnen. Es versteht sich übrigens, daß sich dieses nur so im Durchschnitt, auch nicht einmal von allen Ländern sondern etwa nur von Teutschland oder einzelnen Gegenden Teutschlands ꝛc. sagen lasse. Daß der verzärtelte Italiäner keinen Anspruch auf die Stärke des ausgewitterten Russen machen kann, ist wohl nicht zu läugnen, und wenn sich gleich in Desaguliers Ausspruche:

„Die Kraft von 5 Engländern sei mit der von 7 Franzosen „im Gleichgewicht."

Nationalvorurtheil, wie Hr. Mönnich a. a. O. S. 88. sagt, mit eingemischt haben könnte, so denke ich doch nicht, daß ihn dieses Vorurtheil von der Wahrheit sehr entfernt habe.

Nähme man für einen Engländer p = 63, so würde man für einen Franzosen vielleicht wirklich nur $p = \frac{5}{7} \cdot 63 = 45$ ℔ setzen dürfen. Gegentheils aber wird es doch wohl in der Geschwindigkeit nicht leicht eine Nation dem Franzosen zuvor thun, und für ihn, denke ich, kann man ohne beträchtlichen Fehler v = 7 F. setzen. Ich erinnere übrigens noch, daß die Werthe von p und v hier so bestimmt werden müssen, wie Thiere oder Menschen solche wenigstens einige Stunden, ohne sich zu entkräften, auszuhalten vermögen.

IV. Der Effect einer Maschine muß offenbar daraus beurtheilt werden, ob die angebrachte Kraft eine grosse oder kleine Last mit einer grossen oder kleinen Geschwindigkeit überwältigt, also aus dem Produkt der Last in die Geschwindigkeit des von der Kraft angegriffenen Punkts der Maschine Q · c.

V. Aus (II.) ist $Q \cdot c = pc \cdot \left(1 - \frac{c}{v}\right)^2$ oder $= \frac{p}{v^2} \cdot c \cdot (v - c)^2$ wo $\frac{p}{v^2}$ unveränderlich ist. Die Maschine wird also den größten

Effect

Effect dann haben, wann $(v - c)^2 \cdot c$ am größten ist. Man setze also das Differential von $(v-c)^2 \cdot c$ oder von $v^2c - 2vc^2 + c^3 = 0$; das giebt

$$v^2dc - 4vcdc + 3c^2dc = 0$$

$$\text{also auch } v^2 - 4vc + 3c^2 = 0$$

$$\text{oder } c^2 - \tfrac{4}{3}vc = \frac{-v^2}{3}$$

$$c^2 - \tfrac{4}{3}vc + \tfrac{4}{9}v^2 = \tfrac{4}{9}v^2 - \tfrac{1}{3}v^2 = \tfrac{1}{9}v^2$$

$$c = \tfrac{2}{3}v \pm \sqrt{\tfrac{1}{9}v^2} = \tfrac{2}{3}v \pm \tfrac{1}{3}v$$

Die Methode des Größten und Kleinsten giebt da, wo ein Größtes und ein Kleinstes zusammen statt finden, beide zugleich an; daher erhält man hier zweene Werthe für c, wovon sich der mit dem obern Zeichen auf den kleinsten Effect der Maschine bezieht, wie schon aus (I.) erhellet, der mit dem untern aber auf den größten. Für den größten Effekt der Maschine hat man also

$$c = \tfrac{2}{3}v - \tfrac{1}{3}v = \tfrac{1}{3}v$$

d. h. „Um den größten Effect von einer durch thierische Kräfte zu „betreibenden Maschine zu erhalten, muß man die Kraft mit „einer Geschwindigkeit wirken lassen, welche $\frac{1}{3}$ von der größt„möglichen beträgt."

Menschen richten also bei uns am meisten aus, wenn sie eine Geschwindigkeit von $\frac{6}{3} = 2$ Fuß, und Pferde, wenn sie eine Geschwindigkeit von $\frac{12}{3} = 4$ F. anwenden.

Die vortheilhafteste Geschwindigkeit eines Franzosen wäre $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$ Fuß in einer Sec. Eines Ochsen $\frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ F.

VI. Hieraus giebt sich eine Vergleichung der verschiedenen Effecte.

1) Für Pferde giebt sich der größte Effect $pc\left(1 - \frac{c}{v}\right)^2$

$= 330 \cdot 4 \cdot (1 - \frac{2}{3})^2 = \frac{1320 \cdot 4}{9} = \frac{5280}{9} = 586{,}6$

2) Für Ochsen $= 380 \cdot 1\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = 380 \cdot \frac{10}{17} = 225{,}1$

3) Für Teutsche $= 60 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{480}{9} = 53{,}3$

4) Für Franzosen $= 45 \cdot 2\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 45 \cdot \frac{14}{17} = 46{,}6$

VII. Aufg. Man will eine Last von 3000 ℔ mit der Geschwindigkeit von 3 Fusen in einer Sec. durch Menschen die keine Franzosen sind fortschleppen lassen, und sucht die hierzu erfoderliche Menge von Personen.

Aufl. Die Formel (II.) giebt hier *)

$$p = \frac{Q}{\left(1 - \frac{c}{v}\right)^2} = \frac{1000}{(1 - \frac{3}{4})^2} = \frac{1000}{\frac{1}{16}} = 4000 \text{ ℔}$$

d. h. Die Last, der alle die erforderliche Personen zusammen das Gleichgewicht zu halten vermögen, beträgt 4000 ℔. Nun hält aber 1 Mensch dem Gewicht von 60 ℔ das Gleichgewicht, also ist die erforderliche Anzahl von Personen $= \frac{4000}{60} = 66$ bis 67, die dann die Last in einer Minute auf eine Strecke von $3 \cdot 60 = 180$ F. weit fortführen.

VIII. Aufg. Man will eine Last von 3000 ℔ mit den geringsten Kosten durch Menschen fortführen lassen, und sucht die erforderliche Menge von Personen.

Aufl. Hier muß man $c = 2$ F. setzen und erhält also

$$p = \frac{1000}{(1 - \frac{2}{4})^2} = \frac{1000}{4 : 9} = 2250$$

und nun wie vorhin die gesuchte Anzahl von Personen

$$= \frac{2250}{60} = 37 \text{ bis } 38$$

welche die Last in jeder Minute $2 \cdot 60 = 120$ F. weit fortführen.

Die Kosten in (VII.) werden sich zu denen in (VIII.) verhalten wie

$$\frac{67}{3} : \frac{38}{2} = 134 : 114$$

$$= 67 : 57 \text{ beinahe} = 7 : 6$$

IX. Ueber-

*) Es darf nicht das ganze Gewicht, sondern nur die davon herrührende Friktion in Anschlag gebracht werden, die etwa $\frac{1}{4}$ des Gewichts beträgt.

IX. Ueberhaupt ergiebt sich die vortheilhafteste Anzahl von Personen n zur Bewegung einer Last

$$n = \frac{\left(\frac{Q}{4:9}\right)}{60} = \frac{9Q}{4 \cdot 60} = 0{,}0375 \cdot Q$$

wo Q in Pfunden ausgedruckt werden muß.

So war z. B. in (VIII.) $Q = 1000$, also

$$n = 1000 \cdot 0{,}0375 = 37{,}5.$$

X. Die allgemeine Formel (IX.) ist ungemein brauchbar, und liese sich z. B. auch beim Gebrauch der Ramm-Maschinen, wo oft soviel Lohn verschwendet wird, anwenden.

An der Ramm-Maschine, deren wir uns hier zum Einrammen vieler tausend Pfähle, auf welche die Fundamentmauern derer Gradirhäuser wegen des sumpfigten Bodens gesetzt werden müssen, bedienen, wird ein etwa 5 Ctr. schwerer Klotz, der so genannte Bähr über 20 Fus hoch in die Höhe gezogen, von da er dann herabfällt, und den untergesetzten Pfahl einrammt. Hier könnte man gleichfalls nach der vortheilhaftesten Anzahl von Personen fragen. Man setze also nur $Q = 500$, so hat man

$$n = 0{,}0375 \cdot 500 = 18{,}75$$

wofür man 19 nimmt.

XI. Anwendungen auf die Tritträder liesen sich hier gleichfalls beibringen. Ich werde aber ihre Untersuchung unten, nach Voraussetzung der Hydrod. vortragen und sie auf die Lehre von den unterschlächtigen Wasserrädern gründen.

§. 61. (K. §. 90.)

Man setze also $\varphi = \frac{ms}{10000}$ ꝛc. d. h. man drucke φ in Zehntausendtheilgen aus, statt daß man es zuvor schlechtweg durch n ausdruckte. Wieviel Zehntausendtheilgen des ganzen Drucks s die Friktion φ beträgt, wird durch m bemerkt wo also m gewiß allemal > 1000 ist, da hingegen zuvor n ein Bruch war.

§. 62.

§. 62. (K. §. 113.)

so ist $\frac{1}{M+m} = \frac{1}{M} - \frac{m}{MM}$ ꝛc. die wirkliche Division giebt nämlich

$$M+m \;\Big|\; 1 \;\Big|\; \frac{1}{M} - \frac{m}{M^2} + \frac{m^2}{M^3} - \text{ꝛc.}$$

$$\underline{1 + \frac{m}{M}}$$

$$-\frac{m}{M}$$

$$\underline{-\frac{m}{M} - \frac{m^2}{M^2}}$$

$$+\frac{m^2}{M^2}$$

$$\underline{\frac{m^2}{M^2} + \frac{m^3}{M^3}}$$

$$-\frac{m^3}{M^3}$$

wo vom Quotienten die unendlich kleinen der höhern Ordnung im Buch weggelassen sind.

Jeder Stos bewegt also ꝛc. Der nämlich weder Friktion noch sonst eine Hindernis blos die Trägheit zu überwinden hat. Mir scheint dieses mit den Begriffen von der absoluten Größe der Differentialien in einiger Verbindung zu stehen. Die Trägheit eines ruhenden Körpers zu überwinden, wird Kraft erfodert, aber eine Kraft, die kleiner sein kann, als iede angebliche Grösse, und doch muß sie bei einem Körper grösser sein, als bei dem andern, insoferne der eine mehr Trägheit besitzt als der andere.

§. 63. (K. §. 139.)

Wem das Billardspiel bekannt ist, dem werden diese Sätze hier nicht unerwartet vorkommen. Nur muß man bedenken, daß wir in der Ausübung nie

nie vollkommen elastische Körper vor uns haben, und daß alle Körper bei der Bewegung nur desto mehr wie elastische wirken, ie gröſſer die Geschwindigkeit ist, mit der sie an einander stoſen, weil durch einen langsamen Stos die Gestalt der Körper nicht so merklich geändert wird, daß deren Wiederherstellung einen sehr merklichen Einfluß in die Bewegung haben könnte. Daher treffen die bisherigen Sätze, so wie besonders der hier (K. 139.) desto genauer auch bei Billardspielern zu, ie gröſſer die Geschwindigkeit ist, mit der sie die Kugeln an einander stoſen.

§. 64. (K. §. 157.)

V. s. die Druckf. Es ist nämlich $KL = C \cdot T - \frac{(C + c) \cdot T \cdot m}{M + m}$

$$\left(= \frac{M \cdot C \cdot T + m \cdot C \cdot T}{M + m} - \left(\frac{m \cdot C \cdot T + m \cdot c \cdot T}{M + m} \right) \right.$$

$$= \frac{M \cdot C - m \cdot c}{M + m} \cdot T$$

§. 65. (K. §. 165.)

Man könnte auch beide Kugeln mit ihren Fäden an einem einzigen Nagel aufhängen und dann beide willkührlich aus der vertikalen Richtung bringen; der Punkt, wo sie einander begegnen müßten, indem man sie in der schiefen Lage sich selbst überliese, liese sich durch Rechnung leicht finden. Man setze nämlich die Höhe, um die man P über die niedrigste Stelle erhoben hat, = a, die von Q = b, ferner die Tiefe, um die die Kugel P sinken müßte, bis sie an Q stiese = x, so ist der Raum, um den bis zu dieser Berührung Q sinken muß, = b, und über das muß sie wieder steigen durch die Höhe a — x, wenn P die höher aufgehobene Kugel vorstellt.

Die Zeit, die Q zum Fall durch b braucht, ist $= \sqrt{\left(\frac{b}{15,625} \right)}$

$= \frac{\sqrt{b}}{3,94}$; die Zeit, die Q weiter braucht, wieder durch a — x zu steigen,

ist aus (I. Abschn. 45. S. 28.) $= 0,008 \cdot \left[\sqrt{b} - \sqrt{\left(b - (a - x) \right)} \right]$

dort b ſtatt k, und a — x ſtatt x geſetzt, alſo iſt überhaupt die geſammte Zeit, die Q nöthig hat bis an die P zu ſtoſen, =

$$\frac{\sqrt{b}}{3{,}94} + 0{,}008 \cdot [\sqrt{b} - \sqrt{(b + x - a)}]$$

alſo $\frac{\sqrt{x}}{3{,}94} + 0{,}008 \cdot \sqrt{(b + x - a)} = \frac{\sqrt{b}}{3{,}94} + 0{,}008 \cdot \sqrt{b}$

$= 0{,}261 \cdot \sqrt{b}$. Oder $31{,}7 \cdot \sqrt{x} + \sqrt{(b + x - a)} = 32{,}7 \cdot \sqrt{b}$;

Demnach, wenn man quadrirt,

$$31{,}7^2 \cdot x + b + x - a + 63{,}4 \cdot \sqrt{(x^2 + bx - ax)} = 32{,}7^2 \cdot b$$

oder

$$1005{,}89 \cdot x - a - 1068{,}29 \cdot b = -63{,}4 \cdot \sqrt{\left(x^2 + (b-a) \cdot x\right)}$$

und nun vom neuen quadrirt, giebt

$$1005{,}89^2 \cdot x^2 + (a - 1068{,}29 \cdot b)^2 - 2(a - 1068{,}29 \cdot b) \cdot 1005{,}89 \cdot x$$
$$= 63{,}4^2 \cdot x^2 + 63{,}4^2 \cdot (b - a) \cdot x$$

Man hat alſo die quadratiſche Gleichung $(1005{,}89^2 - 63{,}4^2) \cdot x^2$

$$- \left(2011{,}78 \cdot (a - 1068{,}29 \cdot b) + 63{,}4^2 (b - a)\right) \cdot x$$
$$- (1068{,}29 \cdot (b - a)^2 = 0 .$$

oder

$$x^2 + \frac{200778 \cdot a - 295127 \cdot b}{10077513} \cdot x - \frac{(1068{,}29 \cdot b - a)^2}{10077513} = 0$$

woraus ſich in jedem Fall x ergiebt, oder die Tiefe, um die P ſinken muß, bis ſie der Q begegnet.

Wenn a und b nicht auſſerordentlich beträchtlich von einander verſchieden ſind, wie ſie es dann bei denen damit anzuſtellenden Verſuchen nicht ſein können, ſo iſt das mittlere Glied, das Produkt aus x in ſeinen Koeff. unbeträchtlich, und man kann alſo

$x^2 -$

$$x^2 - \frac{(1068{,}29 \cdot b - a)^2}{100779513} = 0$$

ſetzen; das giebt

$$x = \frac{1068{,}29 \cdot b - a}{\sqrt{100779513}} = 1{,}064 \cdot b - \frac{a}{10038}$$

oder ſehr nahe

$$x = 1{,}064 \cdot b$$

Ex. Es ſei die Kugel Q um die Höhe von 10 F. (= b) über die tiefſte Stelle erhoben, die P z. B. um 12 F. (= a); überläße man nun beide Kugeln in dieſer Lage blos der Wirkung ihrer Schwere, ſo bewegen ſich beide Kugeln gegen einander, und die Kugel P ſtöſt an die Q, wenn ſie (P) um die Tiefe $x = 1{,}064 \cdot 10 - \frac{12}{10038}$ d. i. ſehr nahe um die Tiefe $1{,}064 \cdot 10 = 10{,}64$ F. geſunken iſt, und dieſe Tiefe wird noch eben ſo gefunden werden, wenn gleich P merklich höher oder niedriger geſtanden hätte, ſo lang die hier weggelaſſenen Theile nicht merklich werden.

§. 66. (K. §. 167.)

wo ſein Differential verſchwindet ꝛc. Dieſes iſt die Stelle, worauf ich mich in der Vorr. zur Ausführ. derer Erl. über die An. d. Un. bezogen habe.

§. 67. (K. §. 168.)

So könnte die ungemein groſſe Geſchwindigkeit des Lichts begreiflich werden.

§. 68. (K. §. 174.)

auch das Licht ꝛc. Die Lichtsmaterie oder der Aether ſcheint alſo in einem auſſerordentlichen Grad elaſtiſch zu ſein, oder läßt ſich vielleicht mit Recht als vollkommen elaſtiſch betrachten, welches mit §. 67. übereinſtimmt.

§. 69. (K. §. 192.)

als ich ꝛc. Die nämlich doch auch bei unendlich kleinen Sprüngen noch Entfernung erkennen, wohin der Hr. Hofr. diejenigen zu rechnen ſcheint, welche die Differentialien nur in Anſehung der differentiirten Gröſſen nicht für ſich, = 0 ſetzen.

Erläuterungen über die Hydrodynamik.

§. 70. (K. §. 12.)

Hier ist die Spitze des Dreiecks unten angenommen worden. Wollte man aber den Druck für das umgekehrte Dreieck ABD (fig. 2.) berechnen, so ziehe man von dem Druck auf das Rectangel ABCD den auf BCD ab, so ergiebt der Rest

$$f \cdot c \cdot \tfrac{1}{2}a - \frac{f \cdot c}{2} \cdot \tfrac{1}{3}a = \frac{3fca}{6} - \frac{fca}{6} = \tfrac{1}{3}fca = \frac{fc}{2} \cdot \tfrac{2}{3}a$$

den Druck so groß, als das Gewicht einer Wassersäule, die das Dreieck zur Grundfläche hätte, und $\frac{2}{3}$ so hoch wäre, als das Wasser über AD steht. Der Druck auf das Dreieck ist also nun doppelt so groß, als wenn die Spitze unten ist.

§. 71. (K. §. 28.)

III. *muß nicht nur* = = = *und also* $(2Q + q) \cdot \text{tang } \varkappa$ *sein* ꝛc. Dieses mag wohl ein Versehen sein. Der Deutlichkeit zu Hülfe zu kommen, habe ich die Figur etwas körperlicher gezeichnet. Statt des bloßen Dreiecks $L\mu R$ gedenke man sich das Prisma $LR\nu\lambda\mu L|\lambda$ (hier fig. 3.). Das auf die schiefe Ebene $L|\lambda\mu$ gesetzte prismatische Gefäß sei $ABEK\varkappa\varepsilon\beta B$, das man sich der Zeichnung wegen durchsichtig gedenken kann, so daß man nicht blos die vordere Fläche ABEK, sondern auch die ihr gleichlaufende $\alpha\beta\varepsilon\varkappa$ sehen kann, so wie die beiden Nebenflächen $E\varepsilon\varkappa K$ und $B\beta\alpha A$, da dann im Buch fig. 6 BA die hier gezeichnete Seitenfläche $B\beta\alpha A$, und EK die Fläche $E\varepsilon\varkappa K$ bedeutet. Es ist übrigens αA auf $L\mu$ senkrecht, und die ganze hier gezeichnete Figur zeigt nun perspectivisch, was die fig. 6. im Buch, nur im Profil zeigt.

Nun sieht man leicht, daß das flüßig sein und fest sein der Masse, womit das Gefäß angefüllt ist, auf die Kraft, die erfodert wird, das Gefäß auf der schiefen Ebene stille zu erhalten, gar keinen Einfluß haben kann. Es komme hierbei blos auf das Gewicht dieser Masse an, oder auf den Druck, womit

womit solche vertikal unterwärts wirkt. Flüßig sein hat nur die Folge, daß eine solche Masse auch zugleich ringsum einen horizontalen Druck äussert, der aber durch die Festigkeit des Gefäßes aufgehoben wird, oder falls solche nicht hinreichend genug ist, ein Zerbersten des Gefäßes veranlaßt, übrigens aber mit Sinken und Abglitschen des Gefäßes in gar keiner Verbindung steht.

Ueberhaupt liegt auch schon in I. ein Versehen. Der horizontale Druck auf $A\beta$ ist freilich $= \frac{1}{2} g \cdot AB^2$ (wo $g = A\alpha$), und der horizontale auf $K\varepsilon = \frac{1}{2} g \cdot EK^2$, und dieser treibt das Gefäß hinaufwärts, iener niederwärts — aber der horizontale Druck auf $K\varepsilon$ ist noch nicht der ganze aufwärtsgehende Druck, da der Druck auf $AK\varkappa\alpha$ gleichfalls aufwärts geht. Nun ist der horizontale Druck auf AK dem auf AN, so wie der auf KE dem auf AB völlig gleich, also wird das Gefäß oder Prisma durch den horizontalen Druck des Flüßigen wirklich nicht mit der horizontalen Gewalt $\frac{1}{2} g \cdot (AB^2 - EK^2)$ niederwärts sondern gleichstark auf- und niederwärts gedruckt, und das Abglitschen des Prismas auf der schiefen Ebene rührt blos vom Gewicht der darin befindlichen Masse her, die mag nun flüßig oder fest sein; oder die horizontale Kraft, das Gefäß auf der Ebene zu halten, bleibt allemal nur $= (Q + q) \cdot \text{tang } \varkappa$ so wie die mit AB parallele $= (Q + q) \cdot \text{sin } \varkappa$

Als ein Supplement will ich hier nur das Nothwendigste von den Kastenkünsten, Püschelwerken ꝛc. einschalten.

Von den Kastenkünsten.

§. 72.

I. Man gedenke sich zwo horizontale in einer vertikalen Ebene liegende Wellen AB, CD (fig. 4.) die vielseitige Prismen sind; über beide Wellen sei eine Kette ohne Ende gelegt, woran Gefässe oder Kasten in gewissen Entfernungen von einander angebracht sind, so heist diese ganze Veranstaltung eine Kastenkunst. Die untere Welle liegt im Wasser, und indem nun die obere herumgedreht wird, geht die eine Reihe von Kasten unter das Wasser nieder und füllt sich kastenweis an, da inzwischen die andere Reihe mit den sich so gefüllten Kasten in die Höhe geht, und so ein gefüllter Kasten nach dem andern sich an die obere prismatische Welle bei ihrem Umdrehen anlegt, und das Wasser solchergestalt oben beim Umstürzen ausschüttet.

II. Der Effect einer Kraft komme nicht blos auf ihre abſolute Gröſſe F ſondern auch auf die Geſchwindigkeit α an, mit der ſie wirkt, worüber ſchon (hier §. 60) Unterſuchungen vorgekommen ſind. Es iſt a. a. O. erinnert worden, daß die Wirkung oder der Effekt einer Maſchine allemal aus dem Produkt der abſoluten Laſt q in ihre Geſchwindigkeit c beurtheilt werden muß, und da dieſes Produkt allemal dem Produkt aus der Kraft in ihre Geſchwindigkeit d. i. da die Wirkung der wirkenden Urſache allemal gleich ſein muß, ſo hat man für die geſammte Lehre von Maſchinenweſen die Fundamentalformel

$$F\alpha = qc$$

Da dann $F\alpha$ das mechaniſche Moment der Kraft und qc das mechaniſche Moment der Laſt iſt.

III. Wenn nun die Waſſermenge, welche die Maſchine in der Zeit T auf die Höhe f bringt, M heiſt d. i. wenn durch die Wirkung der Maſchine die Maſſe M in der Zeit T den Weg f durchlauft; ſo hat man nach den Regeln der Mechanik

$$M : q = c : \frac{f}{T}$$

alſo

$$qc = \frac{Mf}{T}$$

folglich aus (II.)

$$F\alpha = \frac{Mf}{T}$$

oder

$$M = \frac{F\alpha T}{f} \quad (\natural$$

Und wenn der Theil, der von F zu Ueberwindung der Friktion verwandt werden muß, φ heiſt, ſo hat man die Friktion mit in Betrachtung gezogen,

$$M = \frac{(F - \varphi) \cdot \alpha T}{f} \quad (\hbar)$$

Man ſieht leicht, daß die vorerwähnten Sätze von allen Waſſerkünſten gelten, und ſo iſt alſo auch ($\hbar$) eine ganz allgemeine hydrauliſche Formel.

IV. Er-

IV. Ex. Eine Kaſtenkunſt ſoll durch acht Mann betrieben werden, die vermittelſt ordentlicher Kurbeln die obere Welle herumdrehen; man ſucht die Waſſermenge M, die ſolchergeſtallt binnen einer Stunde auf eine Höhe von 36 Fuſen gebracht werden kann.

Aufl. Aus (§. 60.) ſetze ich hier

$$a = 2 \text{ Fus}$$

F_a wäre nun (a. a. O. VI.) $= 53,3$ alſo $F = \frac{53,3}{2} = 26,6$ ℔; ſtatt deſſen werde ich aber in der Folge allemal

$$F = 26 \text{ ℔}$$

ſetzen. Weil ſich nun a hier auf Sec. beziehet, ſo hat man

$$T = 1 \text{ St.} = 3600 \text{ Sec.}$$

und l iſt $= 36$ Fus. Die Entfernung der Stelle, wo die Leute angreifen, von der Axe der Welle ſei $= 3$ Fus, der Halbmeſſer der Wellzapfen $= 3$ Zoll $= \frac{1}{4}$ Fus die mittlere Entfernung der Laſt von der Axe $= 1$ Fus, die Anzahl aller Kaſten $= 18$ alſo der gefüllten $= 9$; jeder Kaſten ſoll einen Cub. F. halten, ſo iſt die geſammte vom Waſſer herrührende Laſt $= 9$ C. F. der an dem Punkt, wo die Kraft angreift, eine Kraft $= \frac{1}{3} \cdot 9 = 3$ C. F. das Gleichgewicht hält. Das Gewicht eines jeden Kaſtens ſamt dem zugehörigen Stück Kette betrage $\frac{1}{9}$ Cub. F. ſo iſt das Gewicht von ſämmtlichen leeren Schaufeln mit der Kette $= \frac{1}{9} = 3$ C. F. Endlich ſei das Gewicht der obern Welle mit Zapfen $= 4$ Cub. F. ſo ergiebt ſich endlich die ganze auf die Wellzapfen druckende Laſt $= 9 + 3 + 3 + 4 = 19$ C. F. Die hiervon herrührende Friktion beträgt am Wellzapfen etwa $\frac{1}{9} = 6\frac{1}{4}$ C. F. womit an der von der Kraft angegriffenen Stelle $\frac{\frac{1}{4}}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{108}$ C. F. im Gleichgewicht ſind. Das giebt alſo

$$\varphi = \frac{1}{108} \text{ C. F.} \text{ *)}$$

Man

*) Wenn hier von Cub. Fuſ. die Rede iſt, ſo beziehen ſich ſolche allemal auf Waſſer, wovon ich den C. F. 68 Pfund ſchwer annehme. Uebrigens erinnere ich noch daß die

Man hat also nun in der Formel (§ III.)

$$M = \frac{(3 - \frac{12}{16}) \cdot 2 \cdot 3600}{36}$$

$$= 2\frac{17}{16} \cdot 2 \cdot 100$$

$$= 494 \text{ C. F.}$$

V. Da die untersten Kasten unter Wasser stehen, so übt bekanntlich das darinnen befindliche Wasser keinen Druck aus, sondern wird durch das umstehende getragen. Eigentlich müßte man also nicht nur Φ etwas geringer anschlagen, sondern über das den so gefundenen Werth von M noch um den sovielten Theil grösser nehmen, den sovielten die unter dem Wasser stehende Kasten von der Summe aller angefüllten ausmachen. Stünde also z. B. im Ex. beständig einer von den angefüllten Kasten unter Wasser so betrüge solches $\frac{1}{3}$ von sämmtlichen angefüllten, und man fände

$$M = \frac{\frac{10}{3} \cdot 3 - \left(\frac{12}{16} - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{12}{16}\right)\right) \cdot 2 \cdot 3600}{36}$$

Wenn indessen nur einige Kasten unter dem Wasserspiegel stehen, so hat man nicht nöthig, sich hierbei in solche Subtilitäten einzulassen, da fürs erste von dem in den Kasten befindlichen Wasser vor dem Ausguß unter Wegs gewiß schon vieles verschüttet wird, welches den Werth von M vermindert; fürs andere aber auch die Last durch den Widerstand, den die Kasten in ihrem Durchgang durch das Wasser leiden, wieder vermehrt wird.

Von Paternosterwerken.

VI. Gedenkt man sich statt der Kasten lederne ausgestopfte Kugeln, oder sonst maßive Scheiben, und um solche herum eine cylindrische oder pris-

ma-

die Kraft, die erfodert wird, der berechneten Friktion das Gleichgewicht zu halten, zwar selbst wieder eine Friktion verursacht, und dieserwegen der Werth Φ eigentlich noch um etwas vergrössert werden müsse, aber dieses etwas ist so geringe, daß es keine Aufmerksamkeit verdient, zumal da die Verhältnis der Friktion zur druckenden Kraft überhaupt nicht genau bestimmt werden kann, sondern nur beiläufig = 1 : 3 angenommen wird.

matiſche Röhre, an deren Wände ſie genau anpaſſen. ſo heiſt die Maſchine ein **Paternoſterwerk** oder **Roſenkranzmühle.** Steht alsdann die Röhre mit ihrer untern Oefnung unter Waſſer, ſo muß ſolches in die Röhre ſelbſt hineintreten, und wenn nun die obere Welle herumgedreht wird, alſo der Roſenkranz in der Röhre ſteigt, ſo wird das in der Röhre befindliche Waſſer in der Röhre verſchloſſen, ſobald die erſte Kugel oder Scheibe von unten hineintritt. Wie nun dieſe Kugel weiter in die Höhe geht, dringt von neuem Waſſer zur Röhre hinein, bis endlich die zwote Kugel vor die Oefnung tritt, und das hineingetretene Waſſer nun gleichfalls verſchlieſt; eben ſo wird nun bei fernerer Bewegung des Roſenkranzes immer zwiſchen zwo Kugeln oder Scheiben das Waſſer gepackt, bis es endlich oben zur Ausgußröhre gelangt, da dann hierauf bei fernerem Umdrehen der Welle, das zwiſchen den Kugeln oder Scheiben befindliche Waſſer, ohnunterbrochen ausgegoſſen wird. Bei **cylindriſchen** Röhren, wie gewöhnlich die lothrechtſtehenden ſind, bedient man ſich gewöhnlich lederner ausgeſtopfter Kugeln oder elliptiſcher Sphäroiden, die man **Püſcheln** nennt, und nennt dann die Maſchine ſelbſt ein **Püſchelwerk**, ſo wie man bei **prismatiſchen** Röhren prismatiſche Scheiben oder dergleichen Schaufeln, wie bei den unterſchlächtigen Rädern gebraucht, und daher die Maſchine ein **Schaufelwerk** nennt. Beider Geſtalt geben fig. 5 und 6.

VII. Vermöge III. hat man auch hier für Paternoſterwerke

$$M = \frac{(F - \varphi) \cdot \alpha T}{f}$$

die Buchſtaben in der dortigen Bedeutung genommen.

VIII. Aber die Berechnung des Werths von φ erfodert hier eine beſondere Unterſuchung.

A. für vertikale Püſchelwerke.

1. Man ſuche das Gewicht der in der Röhre enthaltenen Waſſermenge. Es ſei alſo die Länge der Röhre vom Waſſerſpiegel bis zur Ausgußöfnung gerechnet $= l$, ihr innerer Querſchnitt $= bb$; der cubiſche Inhalt eines Püſchels oder Scheibe ſamt zugehörigem Stück Kette $= k^3$ (der ſich bekanntlich hydroſtatiſch finden läßt), die Länge eines Glieds d. h. eines Püſchels ſamt zugehörigem

Kettenstück $= \lambda$, so ist die Last der Wassermenge $= l b^2 - \frac{l}{\lambda} \cdot k^3$ oder $= l \cdot \left(b^2 - \frac{k^3}{\lambda} \right) \cdot v$, wenn die spec. Schwere des aufzufördernden Wassers $= v$ ist, da dann für süses Wasser $v = 1$ wäre. Für Salzwasser gäbe sich der iedesmalige Werth von v aus der Tafel (unten §. 333.)

2. die Friktion der Püschel an der Röhrenwand, die sich nur durch Versuche einigermassen bestimmen läßt, will ich $= \varphi'$ setzen.

3. Der Halbmesser des Wellzapfens heise ϱ die mittlere Entfernung der Last von der Axe der Welle r, und die Entfernung der von der Kraft angegriffenen Stelle von der Axe der Welle R, so ist die mit den beiden Theilen der Last (no. 1 und 2.) im Gleichgewicht stehende Kraft

$$= \frac{r}{R} \cdot \left(l \left(b^2 - \frac{k^3}{\lambda} \right) \cdot v + \varphi' \right)$$

4. Das Gewicht eines ieden Glieds sei γ C. F. und die Anzahl der Glieder $= n$, so ist des ganzen Rosenkranzes Gewicht $= n\gamma$ *)

5. Das Gewicht der obern Welle mit Zapfen sei $= \omega$ Cub. Fus.

6. So ist endlich die gesammte auf die Wellzapfen druckende Last

$$= l\left(b^2 - \frac{k^3}{\lambda} \right) \cdot v + \varphi' + \frac{r}{R} \cdot \left(l \cdot \left(b^2 - \frac{k^3}{\lambda} \right) \cdot v + \varphi' \right)$$

$$+ n\gamma + \omega = \frac{R + r}{R} \cdot \left(l \cdot \left(b^2 - \frac{k^3}{\lambda} \right) \cdot v + \varphi' \right) + n\gamma + \omega$$

7. Die von dieser Last herrührende Friktion am Wellzapfen beträgt

$$\frac{R + r}{3R} \cdot \left(l \cdot v \left(b^2 - \frac{k^3}{\lambda} \right) + \varphi' \right) + \frac{n\gamma + \omega}{3}$$

womit

*) Ich behalte solches aus eben dem Grund, wie bei der Kastenkunst (V.) ganz bei.

womit an dem von der Kraft angegriffenen Punkt ein Gewicht

$$\varphi = \frac{\varrho}{R} \cdot \left[\left(\frac{R+r}{3R} \right) \cdot \left(l \cdot v \cdot \left(b^2 - \frac{k^3}{\lambda} \right) + \varphi' \right) + \frac{n\gamma + \omega}{3} \right]$$

Cub. Fus im Gleichgewicht ist, welches also der Werth ist, den man in (VII.) statt φ gebrauchen muß, um M zu erhalten.

B. für Schaufelwerke.

1. Man suche wieder zuerst die in der Röhre befindliche Wassermenge. Es sei nämlich die Höhe ieder Schaufel EF (hier fig. 6.) = h, ihre Länge = g, die Entfernung zwoer Schaufeln von einander = f, so ist der cubische Inhalt des ganzen Raums CDEF = h · g · f. Weil aber die Schaufeln, bevor sie in die Röhre treten, oben bei CE ganz offen sind, und solchergestalt das Wasser auf ieder Schaufel bis an die durch CO horizontalgehende Ebene ablaufen muß, so ist der zwischen iedem Paar Schaufeln mit Wasser angefüllte Theil nur

$$\begin{aligned} &= g \cdot \text{Trapez CDFO} \\ &= g \cdot (\text{Rectang CDFE} - \text{Triang CEO}) \\ &= g \cdot \left(hf - \frac{CE \cdot EO}{2} \right) \end{aligned}$$

Heist nun der Winkel, unter dem die Röhre gegen den Horizont geneigt ist, k, so hat man

$$\text{Cos. } k : CE = \sin k : EO$$

$$\text{also } EO = \frac{\sin k}{\text{Cos } k} \cdot CE$$

$$= \text{tang } k \cdot f$$

mithin das gesuchte Wasserprisma

$$= g \cdot \left(hf - \frac{CE \cdot EO}{2} \right)$$

$$= g \cdot \left(hf - \frac{f \cdot \text{tang } k \cdot f}{2} \right)$$

$$= gf \cdot \left(h - \frac{f \cdot \text{tang } k}{2} \right)$$

$$\text{oder} = gf \cdot \frac{2h - f \cdot \text{tang } k}{2}$$

welches eben die Formel (K. §. 28. no. II.) ist. Hiervon geht nun noch der cubische Inhalt von dem zwischen iedem Paar Schaufeln mit Wasser bedeckten Kettenstück ab, den ich $= a^3$ setzen will; solchergestalt ist die zwischen jedem Paar Schaufeln befindliche Wassermenge

$$= fg \cdot \frac{2h - f \cdot \text{tang } k}{2} - a^3$$

Diesemnach ist der mit der Röhrenwand parallelgehende Druck der zwischen iedem Paar Schaufeln befindlichen Wassermenge =

$$\left(f \cdot g \cdot v \cdot \frac{2h - f \cdot \text{tang } k}{2} - a^3\right) \cdot \sin k$$

und wenn die Anzahl der in der Röhre, so weit solche über den Wasserspiegel reicht, befindlichen Wasserprismen n heist, so ist die Last der gesammten Wassermenge hier =

$$\left(f \cdot g \cdot v \cdot \frac{2h - f \cdot \text{tang } k}{2} - a^3\right) \cdot n \cdot \sin k$$

2. Sämmtliche Schaufeln mit der Kette will ich so ansehen, als ruheten sie blos auf dem obern Wellbaum, und zögen nach der Richtung der schiefen Röhre, welches die Berechnung der Friktion sehr erleichtert, ohne dabei sehr zu irren.

3. ϱ, r, R, sollen die Bedeutungen haben wie vorhin, so ist die mit der Wasserlast no. 1. im Gleichgewicht stehende Kraft =

$$\frac{r \cdot n \cdot \sin k}{R} \cdot \left(f \cdot g \cdot v \cdot \frac{2h - f \cdot \text{tang } k}{2} - a^3\right)$$

4. Das Gewicht eines ieden Glieds sei γ C. F. und ihre Anzahl $= N$, so ist der sämmtlichen Schaufeln mit Ketten ihr Gewicht $= N\gamma$.

5. ω habe wieder die vorige Bedeutung.

6. Das

6. Das giebt die gesammte auf die Wellzapfen druckende Last

$$= \left(f\,g\,v \cdot \frac{2h - f \cdot \text{tang } k}{2} - a^3\right) \cdot n \cdot \sin k$$

$$+ \frac{r \cdot n \cdot \sin k}{R}\left(f \cdot g \cdot v \cdot \frac{2h - f \cdot \text{tang } k}{2} - a^3\right)$$

$$+ N\gamma + \omega$$

7. Die hiervon herrührende Friktion am Wellzapfen ist

$$\frac{(R+r) \cdot n \cdot \sin k}{3R}\left(f\,g\,v \cdot \frac{2h - f \cdot \text{tang } k}{2} - a^3\right)$$

$$+ \frac{N\gamma + \omega}{3}$$

mit der an der Stelle der Kraft ein Gewicht $\varphi =$

$$\frac{\varrho}{R}\left[\frac{(R+v) \cdot n \cdot \sin k}{3R} \cdot \left(f\,g\,v \cdot \frac{2h - f \cdot \text{tang } k}{2} - a^3\right) + \frac{N\gamma + \omega}{3}\right]$$

Cub. Fus im Gleichgewicht ist.

IX. Wenn sich die Schaufeln mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegen sollen, so wird iedes Wasserprisma desto längere Zeit brauchen bis zu einer gegebenen Höhe f zu gelangen, je schiefer die Röhre steht, d. i. je kleiner k ist, und das Wasser wird also desto langsamer ausgegossen. Dagegen kann man aber auch in solchem Fall die Schaufeln desto länger nehmen, so daß die Wasserprismen zwar langsamer oben ankommen, aber auch iedesmal desto beträchtlicher sind, und der Effekt des Schaufelwerks also immer derselbe bleibt, wie auch der allgemeinen Formel in (VII) die gar nicht k enthält, gemäß ist.

X. Sind aber ausser der Geschwindigkeit der Schaufeln auch alle ihre übrigen Abmessungen bestimmt, so daß man darin nichts ändern soll, so ist es für den Effekt des Schaufelwerks nicht mehr gleichgültig, was man für einen Werth von k annehmen will. Wollte man nämlich die Röhre ganz vertikal stellen d. i. $k = 90°$ nehmen, so würde wegen der Einrichtung des Schaufelwerks gar kein Wasser auf der untersten Schaufel liegen bleiben, und auf

solche Art gar keines in der Röhre in die Höhe gebracht werden können. Nähme man dagegen $k = o$, daß also die Röhre horizontal zu liegen käme, so würden zwar die Räume zwischen jedem Paar Schaufeln ganz mit Wasser angefüllt werden, aber das Wasser würde bei dieser Lage des Schaufelwerks gar nicht aus der Horizontallinie in die Höhe gebracht werden, also der Effekt der Maschine in diesen beiden Lagen $= o$ sein. Je schiefer die Röhre liegt, d. i. je kleiner k ist, desto weniger fliest von denen gefüllten Schaufeln ab, oder desto beträchtlicher werden die Wasserprismen in der Röhre, hingegen kommen ebendiese Wasserprismen desto langsamer zu einer verlangten Höhe, da sich diese Höhen, welche die Prismen in einerlei Zeit, bei einerlei Geschwindigkeit erreichen, wie sin k verhalten. Es muß also eine gewisse Neigung k des Schaufelwerks geben, wobei in diesem Fall sein Effekt der **größte** ist. Und das giebt folgende Aufgabe:

Den Neigungswinkel k zu bestimmen, wobei das Schaufelwerk den größten Effect leistet, wenn sonst alle Abmessungen schon bestimmt sind.

Aufl. Da sich die Geschwindigkeit, mit der iedes Wasserprisma eine gegebene Höhe erreicht, wie sin k verhält, jedes Wasserprisma aber

$= fg \frac{2h - f \cdot \text{tang } k}{2}$ ist, so kommt es nur drauf an, zu untersuchen,

für was für einen Werth von k das Produkt

$$f \cdot g \cdot \sin k \cdot \frac{2h - f \cdot \text{tang } k}{2}$$

also auch, weil f und g als unveränderlich angesehen werden, blos der Ausdruck

$$\sin k \cdot \frac{2h - f \cdot \text{tang } k}{2}$$

am größten wird. Man müßte also diesen Ausdruck nach An. d. Un. §. 30. das. Erl. no. I. und III. differentiiren, und das Differential $= o$ setzen. Das führte auf eine cubische Gleichung, deren mögliche Wurzel den gesuchten Werth von k gäbe. Ich sehe aber nicht, daß dieses künstliche Verfahren kürzer zum Zweck führte, als wenn man gleich verschiedene Werthe von k

ohn-

ohngefähr nach einiger Ueberlegung annimmt, daraus die zugehörigen Werthe von

$$\sin k \cdot \frac{2h - f \cdot \tan g\, k}{2} \quad (\hbar)$$

berechnet, und so die Gränzen sucht, zwischen welchen der Werth von k liegt, dem der größte Werth von $(\hbar)$ zugehört. Ich will selbst die Probe damit machen, und dabei $h = f$ setzen, daß ich also nur den größten Werth von

$$\sin k - \tfrac{1}{2} \sin k \cdot \tan g\, k \quad (Z$$

zu suchen brauche.

1. Es sei $k = 31°$, so wird
$$Z = 0{,}529 - 0{,}264 \cdot 0{,}624$$
$$= 0{,}364 \cdot \cdot$$

2. Es sei $k = 36°$, so wird
$$Z = 0{,}587 - 0{,}293 \cdot 0{,}726$$
$$= 0{,}374 \cdot \cdot \cdot$$

3. Es sei $k = 40°$, so wird
$$Z = 0{,}642 - 0{,}321 \cdot 0{,}839$$
$$= 0{,}372 \cdot \cdot \cdot$$

Also fällt der gesuchte Werth von k zwischen 32° und 40°, weil beide kleinere Z geben, als $k = 36°$, und weil Z für $k = 36°$ nur um 0,002 grösser als für $k = 40°$ ist, hingegen um 0,01 grösser, als für $k = 32°$, so ist zu vermuthen, daß bis etwa auf $k = 38°$ hin, die Werthe von Z noch wachsen werden. Man nehme also an,

4. Es sei $k = 38°$, so ist
$$Z = 0{,}6156 - 0{,}307 \cdot 0{,}781$$
$$= 0{,}3759 \cdot \cdot \cdot$$

5. Es sei $k = 38\frac{1}{2}°$, so ist
$$Z = 0{,}6225 - 0{,}311 \cdot 0{,}795$$
$$= 0{,}3743 \cdot \cdot \cdot$$

6. Es

6. Es sei $k = 37\frac{1}{2}°$, so ist

$$Z = 0{,}6087 - 0{,}304 \cdot 0{,}767$$
$$= 0{,}3756 \ldots$$

Die sehr nahen Werthe von Z für $k = 38°$ und $k = 37\frac{1}{2}°$ geben die sichere Vermuthung, daß der wahre Werth von k zwischen diesen beiden liegen müsse, und man kann nun für die Ausübung mit völliger Sicherheit $k = 37° 40'$ setzen. Auf eben diese Art liese sich der wahre Werth von k auch für $h \gtrless f$ leicht finden; man thut aber wohl, wenn man aus den Tafeln für den Sinus und die Tangente statt dreier Decimalstellen allemal wenigstens vier nimmt, um die Gränzen desto schärfer zu bekommen.

XI. Wenn aber der Neigungswinkel k und sonst alles gegeben ist und f als veränderlich angesehen wird, so ist es gleichfalls nicht gleichgültig, wie groß man f nimmt, und man kann daher noch folgende Frage aufwerfen:

Wie groß muß f sein, damit der Effect des Schaufelwerks am größten werde?

Ich übergehe aber die zu Beantwortung dieser Frage nöthige Rechnung mit Fleis, weil hierbei vorzüglich auf die Ausübung Rücksicht genommen werden muß. Durch viele nahe bei einander gesetzte Schaufeln, wird nicht nur der stetige Gang und bequeme Gebrauch der Maschine in der Ausübung zum beträchtlichen Nachtheil des Effekts verhindert, sondern es wird auch die Friktion durch die Menge der Schaufeln sehr vergrössert, und dadurch der Vortheil, den sonst Schaufelwerke mit nahe beisammen stehenden Schaufeln vor andern haben würden, wieder mit Verlust hingegeben. Daher folgt man hier der auf Erfahrungen gegründeten **Belidorschen** Regel:

„Es soll in der Ausübung $f = h$ genommen werden."

Und nach dieser Voraussetzung müßte man also, wie No. X. gegen das Ende zeigt, das Schaufelwerk allemal unter einem Winkel von etwa $37° 40'$ gegen den Horizont neigen; oder die Höhe des Schaufelwerks soll nur $\frac{61}{100}$ also sehr nahe $\frac{2}{3}$ seiner Länge betragen.

XII. Die bisherigen Formeln gründen sich alle auf die Voraussetzung, daß das Wasser zwischen jedem Paar Schaufeln EF, IG (hier fig. 6.) allemal, auch von der obern IG, noch einen Theil GH bedecke. Daß nun diese Voraussetzung hier statt findet, erhellet aus (XI.) und es ist also nicht nöthig,

die

Digitized by Google

die Rechnung auch für den Fall zu führen, wenn die Oberfläche des Wassers nicht bis an IG reichte, sondern zwischen F und G ansiese.

Eine Schaufelkunst übrigens in iedem vorgegebenen Fall gehörig anzuordnen, wird nun Niemand Schwierigkeit finden, der bis hierhin hat kommen können, daher ich solches übergehe.

C. für schiefliegende Püschelwerke.

XIII. Aus dem, was von VIII. bis XII. ist gesagt worden, lassen sich ohne Schwierigkeit auch die Fragen, die allenfalls in Ansehung der schiefliegenden Püschelwerke vorkommen könnten, beantworten.

XIV. Ich glaube, daß das bisherige hinreichend sein kann, Jedem, der selbst denken mag, die von den Paternosterwerken und denen dabei vorfallenden Berechnungen nöthigen Begriffe zu geben. Weitläuftiger davon handelt Hr. Hofr. Karsten in seinem treflichen Lehrbegrif der ges. Mathem. VI. Th. XXXVIII. und XXXIX Abschn. Desgleichen Belidor in der Archit. hydr. II. B. IIII. Kap. *) Beschreibungen und Zeichnungen findet man auch in des einsichtsvollen Hrn. Oberkammerraths Cancrinus Bergmaschinenkunst.

XV. Für die Ausübung mögten vielleicht Püschelwerke bequemer sein als die Schaufelwerke. Ueberhaupt aber sind diese Arten von Wasserkünsten nur in gewissen Fällen zu gebrauchen, wo nämlich nur eine gewisse Zeitlang sehr viel Wasser aufzufördern, und der Raum nicht verstatter viele Pumpen anzubringen, über das aber auch, welches ein Hauptumstand ist, der Wasserspiegel beständig wenigstens einige Fuse über dem Boden steht, damit das Wasser noch einen merklichen Theil zur Röhre hineindringe und ausserdem noch Platz unter der Röhre für die Welle sowohl als die darunter hergehende Püschel oder Schauf in bleibe. Wo beständig Wasser aufgefördert werden muß, und das Wasser nicht wenigstens immer etliche Fuse tief ist, bedient man sich lieber der Pump-

*) Nur muß Belidor mit Behutsamkeit gelesen werden, da er häufig Berichtigungen nöthig hat. So setzt er z. B. den no. X. bestimmten Werth von k = 24° 21'. Belidors Archit. hydr. bleibt indessen mit Zuziehung des Karstenschen Lehrbegrifs V und VI. Band immer noch ein klaßisches Werk, da sich Herr Hofr. Karsten die Mühe genommen hat, die Belidorschen Versehen überall mit seinem scharfsichtigen Auge aufzusuchen und zu berichtigen.

Pumpwerke, die auch noch den Vortheil gewähren, daß sie wenige Aufsicht und nur selten Reparaturen nöthig haben, auch bequemer durch ein entferntes Rad betrieben werden können. Dahin gehören vorzüglich die Salzwerke, wo besonders auf den Gradirgebäuden die bisher erwähnten Maschinen gar keinen Dienst leisten würden, da fürs erste die stetige Bewegung der Maschine durch ein entferntes Kunstrad, das viele zugleich betreiben sollte, schon Schwierigkeiten haben würde, fürs andere aber auch die Soole in denen Bassins selten über einen ganzen und sehr oft nicht über einen Fus tief steht. *)

§. 73. (K. §. 33.)

Und der Elementardruck ꝛc. Es ist nämlich der Umfang des um den Kegel gehenden Kreises, den HM beschreibt, $= 2y\pi$ also das Element der Kegelfläche $= 2y\pi \cdot ds$, aber $s = \frac{mu}{c}$, also $ds = \frac{m}{c}du$, und $y = f - \frac{(f-b)\cdot u}{c}$, also das genannte Element

$$= 2 \cdot \left(f - \frac{(f-b)\cdot u}{c}\right) \cdot \pi \cdot \frac{mdu}{c}$$

Nun wird dieses Element von einer Wassersäule in der Höhe u gedrükt, also ist der Elementardruck

$$= 2u \cdot \left(f - \frac{(f-b)\cdot u}{c}\right) \cdot \pi \cdot \frac{mdu}{c}$$

$$= \frac{f\pi m}{c} \cdot 2udu - \frac{(f-b)\cdot\pi\cdot m}{c^2} \cdot 2u^2du$$

dessen Integral

$$= \frac{f\pi m}{c} \cdot u^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{(f-b)\cdot\pi\, m}{c^2} \cdot u^3$$

wo

*) Brunnensoole liese sich also wohl noch durch dergleichen Püschelwerke auffördern, wenn das Rad in der Nähe angelegt werden könnte In Halle im Teutschen Brunnen, wird auch wirklich die Soole auf solche Art, vermittelst eines durch Pferde betriebenen Räderwerks aufgefördert s. Hrn. Eberhards neue Beiträge zur Mathesi applikata S. 126. Aber ein Pumpenwerk verdient doch den Vorzug, und ich kann Hrn. Eberhard nicht beitreten, wenn Er a. a. O. S. 127. den Gebrauch des Püschelwerks namentlich bei Salzwerken empfiehlt.

Digitized by Google

wo man für den ganzen abgekürzten Kegel nur noch c ſtatt u zu ſetzen braucht, um die Formel im Buch zu erhalten.

§. 74. (K. §. 31.)

Der Elementardruck auf das Element der Fläche iſt (K. 31.) überhaupt $2uy\pi ds$, wo es nur drauf ankommt ds allemal gehörig anzugeben. Hier iſt nun

$$ds = \sqrt{(dy^2+du^2)}$$

aber $$u = r - \sqrt{(r^2 - y^2)}$$

alſo $$du = \tfrac{1}{2}(r^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2ydy$$

$$= \frac{ydy}{\sqrt{(r^2 - y^2)}} \quad (\hbar$$

und $$du^2 = \frac{y^2dy^2}{r^2 - y^2}$$

demnach $$ds = \sqrt{\left(dy^2 + \frac{y^2dy^2}{r^2 - y^2}\right)}$$

$$= dy \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{r^2 - y^2}\right)}$$

$$= dy\sqrt{\left(\frac{r^2}{r^2 - y^2}\right)}$$

$$= \frac{rdy}{\sqrt{(r^2 - y^2)}}$$

Aber aus $\hbar$ hat man

$$\frac{dy}{\sqrt{(r^2 - y^2)}} = \frac{du}{y}$$

folglich $$ds = \frac{rdu}{y}$$

und nun der Elementardruck =

$$2uy\pi ds = \frac{2uy\pi rdu}{y} = 2\pi urdu, \text{ und } \int 2\pi urdu = \pi ru^2$$

demnach für die ganze innere Hölung $= \pi rc^2 = 2\pi rc \cdot \frac{1}{2}c$. Die Bedeutung hiervon ist nun eigentlich diese:

Der ganze Druck oder die Summe aller Pressungen, die ein Gefäß senkrecht auf seine Fläche leidet, das nach einer Kugelfläche ausgehölt, und in dieser Hölung mit Wasser angefüllt ist, beträgt soviel als das Gewicht einer Wassersäule, die diese innere kugelförmige Hölung zur Grundfläche hätte, und halb so hoch wäre, als die tiefste Stelle der Hölung unter der obersten Stelle des darin befindlichen Wassers liegt.

Daraus ergiebt sich nun auch der horizontale Druck auf die Hölung einer Zone wie die, in der TQ, VR liegen. Er ist nämlich $= \pi r \cdot (DK^2 - DP^2)$. Befände sich das Wasser unter der Hölung MNc, so, daß es durch den ebenen Boden MN verschlossen wäre, so würde das eingeschlossene Wasser gleichfalls einen senkrechten Druck gegen die kugelförmige Wand ausüben, der aber nicht $= \pi r \cdot HC^2$ sondern $= \pi r \cdot (CD^2 - DH^2)$ also beträchtlich grösser als $\pi r \cdot HC^2$ wäre.

Auch läßt sich durch eben diese Sätze allemal der senkrechte Druck auf die erhabene Seite angeben, weil schon aus den gemeinen hydrostatischen Lehren bekannt ist, daß Wasser, das aussen von V bis N steht, eben so stark gegen die erhabene, als Wasser das inwendig von V bis N steht, an die hole Seite drückt.

§. 75. (K. §. 38.)

nicht einmal glücklich gewesen ꝛc. s. die Note §. 72. no. XIV.

§. 76. (K. §. 39.)

Zu II Ex. Noch muß hierzu das Gewicht des Bretes addirt werden. Es sei 4 Zoll oder $\frac{1}{3}$ Fus dick, so ist sein cubischer Inhalt $= 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ Cub. Fus; und wenn sich wegen der nöthigen eisernen Beschlägen leder C. F. gleichfalls 70 ℔ schwer annehmen läßt, so beträgt dieses Gewicht $13\frac{1}{3} \cdot 70 = 933\frac{1}{3}$ ℔ und die Kraft, welche das Schußbret aufziehen soll, muß also grösser als $3733\frac{1}{3} + 933\frac{1}{3}$ oder grösser als $4666\frac{2}{3}$ ℔ sein. Diese Betrachtung dient in Ansehung des Schußbretes solche Anlagen zu machen, daß sich solches allemal von einigen z. E. zweenen dazu bestimmten Männern aufziehen läßt. Für dergleichen Fälle, wo ein Mensch nur wenige Minuten seine ganze Kraft ausübt, läßt sich sicher annehmen, daß ein Mensch von mittlerer Stärke eine Kraft von mehr als 100 ℔ auszuüben vermag, weil es

auf

auf die Geschwindigkeit, mit der das Schutzbret gezogen wird, hierbei gar nicht ankommt. Sollen nun zweene Menschen, die ich nur einer Kraft von 200 ℔ gleich schätzen will, der Last von 4666 ℔ das Gleichgewicht halten, so müssen Kraft und Last zusammen einen Hebel bilden, wo die Kraft viel weiter vom Umdrehungs- oder Ruhepunct absteht, als die Last. Man lege also zwischen die Pfosten AB, CD (hier fig. 7.), in deren Nuthen das Schutzbret auf- und niedergeht, oben über das Schutzbret H in gehöriger Entfernung eine hinlänglich starke Welle ef, woran man eine oder mehrere Ketten gh, ik, befestigt, die zugleich am Schutzbret bei h und k eingehackt werden können. Diese Welle wird ringsum mit Löchern versehen, worein man die Aerme ab stecken und die Welle auf solche Art herumdrehen kann, da dann die Kette sich um die Welle aufwinden und das Bret aufziehen muß. Sollen nun die Aerme bei b angefaßt werden, so giebt sich die nöthige Länge der Aerme durch folgende Betrachtung.

I. Die gesammte Last ruht auf den Wellzapfen; ausser dem schon erwähnten Gewicht von 4666 ℔, kommt nun noch hinzu: 1. das Gewicht der Ketten, das ich = 150 ℔ setzen will. 2. Das Gewicht der Welle mit Wellzapfen, das = 200 ℔ seln mag. 3. Das Gewicht von 200 ℔ womit die Kraft druckt, welche die zween Männer ausüben. 4. Das Gewicht der Aerme ab, das ich = 100 ℔ annehme.

II. Die Summe aller dieser Gewichte

$$= \left\{\begin{array}{l} 4666 \\ +\ 150 \\ +\ 200 \\ +\ 200 \\ +\ 100 \end{array}\right. = 5316 \text{ ℔}$$

ruht also auf den Wellzapfen, und verursacht also an solchen eine Friktion $= \frac{5316}{3} = 1772$ ℔.

III. Beträgt also der Wellzapfen Halbmesser $1\frac{1}{2}$ Zoll und der Welle ihrer 6 Zoll, so beträgt die eben gedachte Friktion soviel, als eine Last $= \frac{1\frac{1}{2}}{6} \cdot 1772 = \frac{1772}{4} = 443$ ℔ am Umfang der Welle angebracht.

IIII. Nun lassen sich erst die Theile der Last, welche wirklich am Umfang der Welle von den beeden Männern gewältigt werden soll, zusammenrechnen;

dazu gehören nämlich

1) die 4666 ℔
2) 150 wegen der Ketten
3) 443 wegen der Friktion an den Wellzapfen.

Summe 5259 ℔

V. Das Gewicht der Aerme ab kommt nun noch den Leuten zur nöthigen Ueberwucht zu Hülfe, daher ich solche hier nicht weiter mehr rechne.

VI. Sollen nun 200 ℔ mit der Last von 5259 ℔ am Umfang der Welle im Gleichgewicht sein, so muß der Abstand der Kraft von der Axe der Welle $= \frac{5259}{200} \times 6$ Zoll $= \frac{5259}{400}$ Fus $= 13,15$ F. sein.

VII. Macht man also die Aerme ab nur 12 Fus lang, und läßt solche allemal von zween Menschen am Ende anfassen, so sind solche zuverläßig zur Aufziehung des Schußbrets hinreichend, da die Kraft wegen der Erinnerung (V) eine beträchtliche Verstärkung bekommt, die leicht den fünften Theil der Kraft selbst betragen kann. Uebrigens wird die größte Kraft nur im Anfang beim Aufziehen erfodert s. im Buch no. IIII.

Zu IIII. am Ende. Hier wird es wohl meiner Absicht nicht unangemessen sein, den Gebrauch der höhern Mechanik zu erläutern, wenn auch die Sache an sich nicht so beträchtlich ist.

Aus höh. Mechan. (I. Abschn. 70.) ist (für $g = 1$) $fdc = du$; hat nun der untere Rand des Brets, den Weg x von der Oberfläche des Wassers an, durchloffen *) so ist nach den Lehren der höh. Mech. seine Geschwindigkeit

$$c = 2\sqrt{15,625} \cdot x \text{ in Rhl. Fusen;}$$

also

$$dc = (2\sqrt{15,625}) \cdot \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$$
$$= \frac{3,953}{\sqrt{x}} \cdot dx$$

und

*) Man setzt voraus, daß niemals $x > a$ sei, wie sich auch für Schußbreter gehört.

und hier ist $f = 1 - \frac{nbx^2p}{2q}$

also

$$fdc = \frac{3{,}953 \cdot dx}{\sqrt{x}} = \frac{3{,}953 \cdot nbx^2pdx}{2q\sqrt{x}} = du$$

Diese Differentialformel integrirt, giebt

$$u = 3{,}953 \cdot \int \left(\frac{dx}{\sqrt{x}} - \frac{nbp}{2q} \cdot x^{\frac{3}{2}}\, dx\right)$$

$$= 3{,}953 \cdot \left(2x^{\frac{1}{2}} - \frac{nbp}{2q} \cdot \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= 7{,}906 \cdot \sqrt{x} - 0{,}79 \cdot \frac{nbp}{q}\, x^2\sqrt{x} \cdot$$

So groß ist also des Brets Geschwindigkeit, wenn man seinen untern Rand um die Tiefe x vom Wasserspiegel an, hat fallen lassen, weil x und u zugleich verschwinden, also keine Const. hinzukommt.

Ex. Es sei das im Buch beschriebene Schutzbret um die Hälfte niedergefallen, also $x = 4$ Fus, so ist das Gewicht des Wassers wie im Buch angenommen, weil solches hier gleichgültig ist,

$$u = 7{,}906 \cdot 2 - 0{,}79 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot 5 \cdot 70}{933} \cdot 16 \cdot 2$$

$$= 15{,}812 - 3{,}161$$

$$= 12{,}651 \text{ Fus.}$$

Mit dieser Geschwindigkeit langt also das Bret an der erwähnten Stelle an. Beim freien Falle würde diese Geschwindigkeit $= 2 \cdot \sqrt{15{,}625} \cdot 4 = 4 \cdot 3{,}953 = 15{,}812$ Fus sein.

Hieraus läßt sich auch die Stelle bestimmen, wie weit das Schutzbret, sich selbst überlassen, in den Ruthen unter den Wasserspiegel niedersinken wird. Für diese Stelle muß nämlich $u = 0$ werden; man hat also

$$7{,}906 \cdot \sqrt{x} - 0{,}79 \cdot \frac{nbp}{q} \cdot x^2\sqrt{x} = 0$$

mit-

mithin auch

$$7{,}906 - 0{,}79 \cdot \frac{nbp}{q} \cdot x^2 = 0$$

oder $$1 - 0{,}1 \cdot \frac{nbp}{q} \cdot x^2 = 0$$

und nun $$x = \sqrt{\frac{1}{0{,}1 \cdot \frac{nbp}{q}}} = \sqrt{\frac{10 \cdot q}{nbp}}$$

also im Ex. $$x = \sqrt{\frac{9330}{116{,}66}} = \sqrt{79{,}79} \cdot \cdot$$

$$= 8{,}94 \text{ Fus.}$$

Das nur erwähnte Schutzbret fällt also, da es nur 8 Fus hoch ist, völlig nieder; wäre es aber bei eben dem Gewicht über 9 Fus hoch, so würde es nicht ganz niederfallen, sondern beim 9ten Fus gewiß hängen bleiben, wenn man ihm nicht mit einer äusern Gewalt zu Hülfe käme. Die Stelle aber, wo das Bret im Fallen hängen bleiben muß, ist offenbar von der Stelle, wo es hingebracht wegen der Friktion hängen bleibt, verschieden, die Friktion in den Nuthen ist nämlich =

$$\frac{nbx^2p}{2}$$

ist also des Brets Gewicht = q wie vorhin, so muß für die leztere Stelle

$$q = \frac{nbx^2p}{2}$$

sein; das giebt

$$x = \sqrt{\frac{2q}{nbp}}$$

und dieses x verhält sich zum vorigen, wie $\sqrt{2} : \sqrt{10}$ oder wie $1 : \sqrt{5} = 1 : 2{,}236$; demnach wird das Schutzbret im Ex. schon zwischen den Nuthen hängen bleiben, wenn man es nur $\frac{8{,}94}{2{,}236} = 4$ Fus tief ruhig unter das Wasser läßt.

§ 77.

§. 77. (K. §. 42.)

NdcbN (fig. 8.) sei die innere vom Wasser bedeckte Dammfläche, und aNb wo aN = bN ist, ein vertikaler Durchschnitt vom Damm, so ist BN = h ND = c, und der horizontale Druck des Wassers gegen den Damm = $\frac{h^2c}{2} \cdot p$ (K. 41. 39. IIII.); es sei weiter ab = b, so ist der cubische Inhalt des Damms = $\frac{hbc}{2}$, also wenn das Gewicht von einem Cub. Fus Dammerde = p + γ mithin nach Abzug des im Wasser abgehenden Gewichts = γ ist, des Damms Druck auf den Boden = $\frac{hbc}{2} \cdot \gamma$. Ausserdem druckt aber auch das Wasser selbst den Damm noch vertikal unterwärts mit einer Kraft = $\frac{h^2c}{2} \cdot p \cdot \text{Cot } \beta$ (K. 41.) also ist

des Damms gesammter vertikaler Druck auf den Boden

$$= \frac{hbc\gamma}{2} + \frac{h^2cp}{2} \cdot \text{Cot. } \beta$$

und die hiervon abhängende Friktion

$$= \frac{hbc\gamma + h^2cp \cdot \text{Cot } \beta}{3 \cdot 2}$$

welches eigentlich der Widerstand des Damms ist; soll also dieser dem Druck des Wassers das Gleichgewicht halten, so hat man

$$\frac{h^2cp}{2} = \frac{hbc\gamma + h^2cp \cdot \text{Cot } \beta}{3 \cdot 2};$$

$$\text{aber Cot } \beta = \frac{\text{Cos } \beta}{\text{sin } \beta} = \frac{Bb}{NB}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}b}{h} = \frac{b}{2h}$$

$$\text{also} \quad \frac{h^2cp}{2} = \frac{hbc\gamma + \frac{1}{2}hcpb}{3 \cdot 2}$$

$$\text{und} \quad hp = \frac{b\gamma + \frac{1}{2}pb}{3}$$

$$\text{also} \quad b = \frac{3hp}{\gamma + \frac{1}{2}p} \quad (\text{h}$$

$$= \frac{3h}{\frac{\gamma}{p} + \frac{1}{2}}$$

welches für die Lehre von Anlegung der Dämme eine Fundamentalformel ist. Uebrigens müssen b und h allemal in Fusen ausgedruckt werden weil p und γ gleichfalls auf Cub. Fuse gehn. Eben diese Untersuchung trägt Hr. Silberschlag in seiner ausführlichen Abhandlung der Hydrotechnik I. Th. S. 348. u. f. vor, und findet, wenn ich seine Buchstaben gehörig verwandle.

$$b = \frac{3hp}{p + \gamma}$$

die ganz was anders als die $\frac{h}{}$ giebt. Der Unterschied der Formel $\frac{h}{}$ von der Silberschlagschen rührt von zwo Ursachen her. Einmal glaubt Hr. S. der Damm könne deswegen nichts von seinem eigenen Gewicht verliehren, weil er nicht im Wasser schwimme, und sein eigener Druck sei also nicht $= \frac{hbc}{2}\gamma$ sondern $\frac{hbc}{2} \cdot p + \gamma$. Wenn man aber bedenkt, daß öfters Dämme bei lang anhaltendem Regen ganz von Wasser durchdrungen, auch wohl von Wasermäusen, Maulwürfen u. d. g. öfters durchwühlt werden, und dadurch das Wasser im Behälter, in den Damm selbst zu dringen vermögend wird, und daß man sich bei Anlegung der Dämme allemal auf die widrigsten Zufälle gefaßt halten müße, so scheint Hrn. S. Behauptung keinen Beifall zu verdienen; die Erfahrung selbst widerspricht ihm auch offenbar, wie ich aus mehreren Zufällen weis. An einem Teich, der noch nicht ganz mit Wasser angefüllt war, brach der Damm, der nach Hrn. S. Formel angelegt war, und wobei man doch noch etwas zugegeben hatte, bei lang anhaltendem Regen los. Nachdem alles Wasser abgeflossen war, reparirte man den Schaden und seßte alles wieder in den vorigen Stand, weil man das Ausbrechen gar nicht in der Schwäche des Damms zu suchen geneigt war, sondern allerlei andere Ursachen sich gedachte.

Und

Und nun brach er im folgenden Jahr, da der Teich wieder ganz mit Wasser angefüllt war, bei anhaltender nasser Witterung zum zweitenmal los. Auf solche Art wurde man mit Schaden von der Misslichkeit der Silberschlagschen Formel überführt. Hr. S. mögte also wohl a. a. O. S. 351. Brahmsen und die ihm folgen in Ansehung dieses Umstandes mit Unrecht getadelt haben. Fürs andere hat Hr. S. den beträchtlichen Umstand, daß das Wasser selbst auch noch vertikal auf den Damm drückt, ganz übersehen, und dadurch unwissend einen beträchtlichen Theil des Werths von b gewonnen, wovon er durch seine Behauptung erst verlohren hatte, daher er auch in der Ausübung nicht so leicht von der Unrichtigkeit seiner Formel konnte überführt werden, als es ohne dieses letztere Versehen würde geschehen sein. Ich erinnere übrigens noch, daß Brahms a. a. O. §. 163.

$$p = 70$$

$$\text{und } \gamma = 30$$

setzt; das gäbe also $\frac{\gamma}{p} = \frac{3}{7}$ und aus (X

$$b = \frac{3h}{\frac{3}{7} + \frac{1}{2}} = \frac{3h}{\frac{13}{14}} \text{ oder}$$

$$b = 4\frac{2}{13} \cdot h = 3{,}23 \cdot h \quad (X$$

Ex. Es sei h = 10 Fus, so wird aus der Formel (X

$$b = 10 \cdot 3{,}23 = 32{,}3 \text{ Fus}$$

Nach Hrn. Silberschlag gäbe sich

$$b = \frac{3 \cdot 10 \cdot 7}{7 + 3} = 21 \text{ Fus.}$$

Weil aber der Widerstand des Damms, dem Druck des Wassers nicht blos das Gleichgewicht halten, sondern ihm noch merklich überlegen sein soll, über das aber auch erfodert wird, daß oben auf dem Damm ein bequemer Gang bleibe, so setzt man die beiden rechtwinklichten Dreiecke, oder Prismen an den Dreiecken nicht unmittelbar beisammen, sondern rückt sie drei oder vier Fuse weit oder noch mehr von einander, wie die Entfernung $\gamma\delta$ (fig. 9.) zeigt, und stampft den dadurch entstehenden parallelepipedischen Raum $\alpha\gamma\delta\beta\varepsilon\xi\nu\mu$ mit

gutem Lett aus. (Dieses war auch bei dem erwähnten zweimal durchgebrochenen Damm geschehen). Diese Lettwand, welche die Kappe heist, wird alsdann oben mit Rasen belegt. Verlangt man einen mehr als 4 Fus breiten Weg $\alpha\beta\varepsilon\zeta$ auf dem Damm, so kann man zu beiden Seiten der Kappe von δ nach θ und von γ nach η noch von den berechneten Prismen ein Stück abschneiden, und mit zur Kappe nehmen.

§. 78. (K. §. 43.)

Eben diese Bemerkung läßt sich auch auf den Druck der Erde anwenden.

MNQP (fig. 10.) sei eine von den vier vertikalen Wänden eines in der Erde gegrabenen parallelepipedischen Behältnisses, und SNMTVP die hinter dieser Wand stehende Erde, QPR die horizontale Ebene des Bodens, so werden nach der Länge des Bodens PR dergleichen Balken wie BD gelegt, worauf an der Wand die Schwelle PQ zu liegen kommt, in welche dann dergleichen Pfosten wie OB die oben verzapft sind, gesetzt werden; über sämmtliche Pfosten wird hernach eine gehörig verlochte Schwelle MN gelegt, so, daß die Zapfen der Pfosten in die Löcher dieser Schwelle fallen, und Pfosten und Schwellen werden noch durch Büge np so mit einander verbunden, daß Büge, Pfosten und Schwellen sämmtlich eine Ebene fallen. Hinter die Pfosten werden Bohlen angenagelt, so daß die Erde unmittelbar wider solche zu liegen kommt, also die Bohlen zwischen der Erde und den Pfosten sich befinden. Damit nun aber auch die Pfosten wegen des Drucks der Erde nicht einwärts weichen können, so werden von dem horizontalen Balken BD, Streben LK, gegen die Pfosten OB geführt. Da man dann

$$OK = \frac{2}{3}OB$$

oder $BK = \frac{1}{3}OB$

und $BL. = BK$ gleichfalls $= \frac{1}{3}OB$

nimmt. Es ist nicht nöthig, daß alle Pfosten mit Bügen np und Streben LK verwahrt werden, sondern hinreichend, wenn Pfosten mit und ohne Büge mit einander abwechseln, da dann die Streben an die Pfosten ohne Büge gesetzt werden. Damit die Bohlen hinlänglichen Widerstand leisten, so müssen die Pfosten nicht über 4 Fus weit von einander gesetzt werden, und so stünden also die Mittellinien derer mit Bügen versehenen Pfosten, desgleichen der Streben, 8 Fus weit von einander. Man sieht nun leicht, wie auf solche Art das ganze Behältnis hinlänglich gegen den Druck der Erde verwahrt werden kann.

Soll

Soll dabei das Durchdringen des Waſſers völlig verhütet werden, ſo wird hinter die bretene Wand noch eine etliche Fus dicke Lettwand eingeſtampft.

Auf dem allen, was bis hierhin iſt geſagt worden, beruht die ganze Lehre von Anlegung derer Soolenbehälter oder ſogenannten **Reſervoirs** auf den Salzwerken.

Hierher gehört auch ein Aufſatz vom H. H. Käſtner in dem 1778 erſchienen Band derer Actor. Acad. Erfurd. der die Streben betrift.

Soll dem Einſturz der Erde durch eine Mauer vorgebeugt werden, ſo entſteht aus denen dabei zu beobachtenden Regeln, die Lehre von den **Futtermauern**, die ich hier nicht ganz übergehen darf.

NRSD (fig. 11.) ſei ein vertikaler auf die innere Wand eines Teichs oder Grabens ſenkrechter Durchſchnitt durch das Ufer und DG, horizontal und ſenkrecht auf ND, liege im Boden des Grabens. Weil nun vom Ufer ein Stück NTD einrutſchen könnte, ſo ſetzt man an die innere Wand auf den Boden des Teichs eine Mauer, von der CDEF ein vertikaler Durchſchnitt iſt, und giebt derſelben noch zu beſſerer Befeſtigung eine Böſchung FEG. Dadurch erhält man gegen den **Einſturz des Ufers** eben die Sicherheit, die man vorhin gegen die **Ausbrechung des Damms** verlangte. Ich werde nun anfangs annehmen, die Erde werde durch anhaltende naſſe Witterung in einen völligen Brei verwandelt, um dadurch die Formel für den äuſerſten Fall, den man doch nicht zu erwarten hat, einzurichten. Nachher aber ſoll die Friktion der Erde beim Abglitſchen noch mit betrachtet werden, um die Mauern doch nicht durch eine unnöthige Stärke zu koſtbar zu machen.

I. Die ſpecifiſche Schwere des Mauerwerks ſei γ, der Erde g, ſo iſt das Gewicht eines prismatiſchen Stücks Erde, das TND zur Grundfläche und die Länge l hat,

$$= \frac{(TN \times ND) \cdot g \cdot l}{2}$$

und das Gewicht der Mauer, wovon CFED ein vertikaler Durchſchnitt und die Länge gleichfalls l iſt, $=$

$$\left(\frac{CF + DG}{2}\right) \cdot CD \cdot l \cdot \gamma$$

II. Es ſei alſo das zuerſt genannte Gewicht = P, das letztere = p, ferner DE = x, EG = a, TN = b, DN = h, und CD = c, ſo iſt

$$P = \frac{bhlg}{2}$$

und

$$p = \left(\frac{2x + a}{2}\right) \cdot cl\gamma$$
$$= xcl\gamma + \tfrac{1}{2}acl\gamma$$

III. Wenn die Erde RNDS frei ſtehen bleibt, ſo bricht der Erfahrung gemäß von ſelbſt, wenigſtens bei anhaltender naſſer Witterung ein Stück ſchief ab, und rutſcht ſolange nach, bis die Erde, welche ſtehen bleibt, eine Abdachung bekommt, bei der ſie ſich erhält. Ich will ſetzen, DTN ſei das Stück, das ſolchergeſtalt abzurutſchen ſucht, ſo wird ſolches gegen die Mauer CD einen mit CD parallelen Druck =

$$P \cdot \sin \alpha$$

(§. 28.) ausüben, der alſo hier (II.) =

$$\frac{bhlg}{2} \cdot \sin \alpha$$

und wegen der Friktion =

$$\frac{\frac{bhlg}{2} \cdot \sin \alpha - \frac{\frac{bhlg}{2} \cdot \mathrm{Cof.}\ \alpha}{3}}{}$$

$$= \frac{bhlg}{2} \cdot \left(\sin \alpha - \frac{\mathrm{Cof}\ \alpha}{3}\right)$$

alſo für $\alpha = 45°$,

$$= \frac{bhlg}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \sin \alpha$$

$$= \frac{bhlg}{3} \cdot \sin \alpha$$

und

und der gegen die Mauer senkrechte Druck also

$$= \frac{bhlg}{3} \cdot \text{tang } \alpha$$

und wenn μ der Mittelpunkt des Drucks, also

$$D\mu = \left(c - \frac{2c^2 + 3ec}{3c + 6e}\right) \quad (\text{K. 24.})$$

ist, wo e den über die Mauer hervorragenden Theil des Ufers CN bedeutet, so ist das Moment, womit die Erde gegen die Mauer druckt, und solche um den Punkt G zu drehen strebt, die Friktion mit in Betrachtung gezogen, =

$$\left(1 - \frac{2c + 3e}{3c + 6e}\right) \cdot \frac{cbhlg \cdot \text{tang } \alpha}{3}$$

III. Die Mauer widersteht dieser Umdrehung mit dem entgegengesetzten Moment

$$(a + \tfrac{1}{2}x) \cdot xcl\gamma + \tfrac{2}{3}a \cdot \tfrac{1}{2}acl\gamma$$

wie aus II. und den Lehren der Statik erhellet, wenn ihre Verbindung mit dem Boden ungerechnet bleibt.

V. Soll also der Widerstand der Mauer, deren Zusammenhang mit dem Boden hier nicht mit betrachtet wird, dem Druck der Erde TDN das Gleichgewicht halten, so hat man

$$\left(1 - \frac{2c + 3e}{3c + 6e}\right) \cdot \frac{bhglc \cdot \text{tang } \alpha}{3} =$$
$$(a + \tfrac{1}{2}x) \cdot xcl\gamma + \tfrac{1}{3}a^2cl\gamma$$

oder $$\left(1 - \frac{2c + 3e}{3c + 6e}\right) \cdot \frac{bhg \cdot \text{tang } \alpha}{3} =$$
$$(a + \tfrac{1}{2}x) \cdot x\gamma + \tfrac{1}{3}a^2\gamma$$

VI. Für α, oder den Winkel unter welchem die Erde abzurutschen strebt, will ich 45° annehmen, weil sich ganz frisch aufgeworfene Erde gewöhnlich selbst durchs Herabrutschen, so wie ein Haufen Korn u. d. g. diese Böschung von 45° giebt.

VII. Also

VII. Alſo hat man NO = ND oder b = h und tang $\alpha = 1$; dieſes in die Formel (V) geſetzt, giebt

$$\left(1 - \frac{2c + 3e}{3c + 6e}\right) \cdot \frac{h^2 g}{3} = (a + \tfrac{1}{2}x) \cdot \gamma x + \tfrac{1}{3} a^2 \gamma$$

wo die ganze in g multiplicirte Gröſſe A heiſen ſoll.

VIII. Alſo hat man

$$Ag - \tfrac{1}{3} a^2 \gamma = a\gamma x + \tfrac{1}{2}\gamma x^2$$

oder
$$\frac{2Ag}{\gamma} - \tfrac{2}{3} a^2 = x^2 + 2ax$$

und
$$\frac{2Ag}{\gamma} + \tfrac{1}{3} a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$= (x + a)^2$$

alſo
$$x = -a + \sqrt{\left(\frac{2Ag}{\gamma} + \tfrac{1}{3} a^2\right)}$$

Nun iſt
$$1 - \frac{2c + 3e}{3c + 6e} = \frac{3c + 6e - 2c - 3e}{3c + 6e}$$
$$= \frac{c + 3e}{3c + 6e}$$

mithin

$$x = -a + \sqrt{\left(2 \cdot \frac{c + 3e}{3c + 6e} \cdot \frac{h^2 \cdot g}{3 \cdot \gamma} + \tfrac{1}{3} a^2\right)}$$

$$= -a + \sqrt{\left(\frac{(2c + 6e) \cdot h^2 g}{3 \cdot (3c + 6e) \cdot \gamma} + \tfrac{1}{3} a^2\right)}$$

VIII. Für c = h, wird alſo, weil da zugleich e = o iſt

$$x = -a + \sqrt{\left(\tfrac{2}{3} \cdot h^2 \cdot \frac{g}{\gamma} + \tfrac{1}{3} a^2\right)}$$

$$= \frac{-a + \sqrt{\left(2h^2 \cdot \frac{g}{\gamma} + 3a^2\right)}}{3}$$

X. Er.

X. Ex. 1. Es sei $h = 30$ Fus. $a = 5$ F. $\frac{g}{\gamma} = \frac{1}{3}$

so ist
$$x = -5 + \frac{\sqrt{(2 \cdot 900 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 25)}}{3}$$
$$= -5 + \frac{\sqrt{1155}}{3} = -5 + \frac{34}{3}$$
$$= 6{,}33 \text{ Fus}$$

2. Für $h = 10$, $a = 2$ Fus, wird
$$x = -2 + \frac{1}{3}\sqrt{(200 \cdot \frac{1}{3} + 12)}$$
$$= -2 + \frac{1}{3}\sqrt{132} = -2 + \frac{11{,}5}{3}$$
$$= 1{,}83 \text{ Fus.}$$

3. Für $a = 0$ wird im 1 Ex. $x = \frac{\sqrt{1080}}{3} = \frac{32{,}86}{3}$
oder sehr nahe $= 11$ Fus, wo nämlich die Mauer gar keine Böschung hat.

XI. Weil die Mauer abcd (fig. 12.) welche den Druck leidet, sowohl an ihren beiden Ecken ad, bc, wo sie an andere Wände stöst, als auch mit der Grundmauer defe noch einen beträchtlichen Zusammenhang hat, der hier gar nicht in Anschlag gekommen ist, so hat man nicht nöthig, in der Ausübung die Mauer stärker zu machen, als sie die Rechnung giebt, weil der eben erwähnte Umstand den Widerstand der Mauer doch beträchtlich grösser giebt, als er zum bloßen Gleichgewicht mit dem Druck der Erde zu sein brauchte.

XII. Es ist übrigens für diese Rechnung gleichgültig, ob man a groß oder klein nimmt, weil sich der Werth von x darnach richtet. Wenn man aber aus einem Punct in CF (Fig. 11.) den ich mit n bezeichnen will, auf einen Punct in DG, den ich m heisen will, gerade Linien nm so zieht, daß die daraus entstehende Trapezen Cnm D alle einerlei Grössen bekommen, so bleibt das Gewicht der Mauer, wovon diese Trapezen vertikale Durchschnitte sind, zwar unverändert, aber ihr Mittelpunkt der Schwere tritt desto weiter von m nach D zu; je näher n bei C liegt, also wird das Moment der Mauer, womit solche dem Umsturz widersteht, bei einerlei Gewicht desto grösser, je kleiner Cm oder x wird. Umgekehrt also wird bei einerlei Moment des Widerstands der

Mauer ihr Gewicht desto kleiner, je kleiner man x nimmt. Das giebt die Folge:

„Die Mauer kostet desto weniger Steine, Mauerlohn und „Zeit zum Aufführen, je kleiner man x oder je grösser man „die Böschung der Mauer a nimmt."

Und in Rücksicht dieses Satzes ist es allemal vortheilhafter a groß als klein zu nehmen. Aber wenn die Mauer dünne wird, so lassen sich die Steine nicht mehr so gut unter einander verbinden, und es reist sich bald ein Stein vom andern los; vielleicht irre ich daher nicht, wenn ich es für rathsam halte, in allen Fällen x etwa 2 Fus stark anzunehmen (auch in Fällen, wo es ohne Böschung nicht einmal 2 Fus groß zu sein brauchte und daher die Rechnung a verneint geben würde.) und dann a gehörig daraus zu berechnen.

XIII. Die Formel (VIIII.) gäbe nämlich

$$x^2 + 2ax + a^2 = \tfrac{2}{3} h^2 \cdot \frac{g}{\gamma} + \tfrac{1}{3} a^2$$

und $$\tfrac{2}{3} a^2 + 2ax = \tfrac{2}{3} h^2 \cdot \frac{g}{\gamma} - x^2;$$ oder

$$a^2 + 3ax + (\tfrac{3}{2})^2 x^2 = \tfrac{2}{3} h^2 \cdot \frac{g}{\gamma} + \tfrac{9}{4} x^2 - x^2$$

also $$a = -\tfrac{3}{2} x + \sqrt{\left(\tfrac{2}{3} h^2 \cdot \frac{g}{\gamma} + \tfrac{5}{4} x^2\right)}$$

XIIII. Ex. Für $h = 30$, $\frac{g}{\gamma} = \frac{1}{3}$ und $x = 2$

würde
$$\begin{aligned} a &= -3 + \sqrt{(\tfrac{2}{3} \cdot 900 \cdot \tfrac{1}{3} + 5)} \\ &= -3 + \sqrt{125} \\ &= -3 + 11{,}18 = 8{,}18 \text{ Fus.} \end{aligned}$$

Nähme man hier $a = 4$ Fus, so gäbe sich aus VIIII.

$$\begin{aligned} x &= -4 + \sqrt{(120 + 5{,}33)} \\ &= -4 + 11{,}19 = 7{,}19 \text{ Fus.} \end{aligned}$$

Bei-

Beidesmal gäbe die Mauer einerlei Widerstand, aber ihr vertikaler Durchschnitt wäre

im ersten Fall = 30 · 2 + 30 · 4,09 = 182,7
im andern = 30 · 7,19 + 30 · 2 = 275,7

Also verhält sich die Menge der erforderlichen Steine, der Maurerlohn und die erfoderliche Zeit zum Mauern, iedes dieser drei Stücke in beiden Fällen

wie 1827 zu 2757
beinahe wie 2 zu 3

XV. Ich habe für die Ausübung sicher zu gehen geglaubt, wenn ich $\frac{g}{\gamma} = \frac{1}{2}$ setzte. Ist die Mauer trocken ohne Speis aufgeführt, so sind zwischen den Steinen viele Zwischenräume, die nur mit Moos verstopft werden. Es tritt daher in solchem Fall das im Graben allenfalls befindliche Wasser zwischen die Steine, so daß nun das Gewicht von 1 C. F. Mauerwerk nur noch $= \gamma - 68$ ℔ oder etwa $= g$ bleibt. Das giebt also für trockene Mauern $\frac{g}{\gamma} = 1$. In besondern Fällen der Ausübung wird man indessen diese Vorausetzungen näher zu prüfen Gelegenheit haben.

XVI. Ex. für trockene Mauern. Für $h = 10$ Fus und $x = 2$ F. wird (XIII.)

$$a = -3 + \sqrt{(\tfrac{2}{3} \cdot 100 + 5)}$$
$$= -3 + 5,21 = 2\tfrac{1}{4} \text{ Fus}$$

dahingegen für gespeiste Mauern hier

$$a = -3 + \sqrt{(\tfrac{2}{3} \cdot 100 \cdot \tfrac{1}{2} + 5)}$$
$$= -3 + 4,28 = 1,28 \text{ Fus}$$

wäre.

XVII. Treffliche Abhandlungen über die Futtermauern findet man unter andern, in des verdienstvollen Hrn. Geheimenraths Böhm Magazin für Ingenieurs und Artilleristen IV und V. Band.

Desgleichen eine, im 3ten Band derer Abhandl. einer Privatgesellschaft in Böhmen zur Aufnahme der Mathem. ꝛc. die mir aber nicht selbst zu Gesicht gekommen ist.

§. 79. (K. §. 45.)

Die Lehre von der Festigkeit der Röhren, ist für die Ausübung ungemein wichtig. Ich habe deswegen in den Beiträgen zur Aufnahme der Salzwerkskunde 2te Pr. hierüber selbst eine besondere Abhandlung beigebracht, worin ich aber ganz andere Formeln, als die hier im Buche sind, angegeben habe. Ich habe auch nicht gefunden, daß man mir Einwürfe dagegen gemacht hätte, vermuthlich weil der Aufsatz wegen seiner Unbeträchtlichkeit Keines Prüfung werth geschienen hat. Nur der einsichtsvolle Göttingische Hr. Rec. sagt in den Götting. gel. Anz. 40. St. 2 Oct. 1779. bei Beurtheilung meines Aufsatzes:

„Hrn. L. Bemühungen hierüber, könnten vielleicht Zusätze und „Berichtigungen verstatten."

Das hat mich veranlaßt, der Sache aufs neue nachzudenken, und die dortige Theorie wirklich in etwas abzuändern. Ich werde zwar den Satz, daß die Festigkeit der Röhren in einem stärkern Verhältnis als die Dicke der Wand, und zwar in dem nämlichen, das ich a. a. O. angegeben habe, wächst, beibehalten; aber aus dem Buche hier werde ich zugleich annehmen, daß die reisende Gewalt in eben dem Verhältnis mit der Dicke der Wand zunimmt, und daß also die Stärke oder Haltbarkeit der Röhre, doch ihrer Wanddicke proportional bleibt. (s. Erl. zu K. §. 76.)

§. 80. (K. §. 46.)

Dieser trennenden Kraft . . . . entgegengesetzt sind 2c. Ein an sich richtiger Satz, daß es nämlich beim Zersprengen der Röhre gar nicht auf den Zusammenhang der Wand an AB, ab ankomme, scheint mir hier auf eine Art dargethan, die gegen die Wahrheit des erwähnten Satzes wirklich Zweifel erregen könnte. Wenn das Theilgen ABba etwa durch einen in Aa sowohl als in Bb gemachten ganz durchgehenden Einschnitt, von Aa und Bb schon getrennt worden ist; so wird bekanntlich doch noch eine sehr beträchtliche Gewalt erfodert, das Theilgen nun noch durch einen auf solches senkrechten Druck auch von AB und ab loszureisen. Das Theilgen ist nämlich nicht blos als ein an den Seitenflächen ab, AB vollkommen glattes Stück in die an den Seiten ab, AB vollkommen glatte Oefnung der Röhrenwand hineingeschoben, sondern Theilgen der Röhre laufen über Theilgen des Stücks abBA weg, und greifen so in einander, daß sie bei der Trennung des Stücks abBA von AB, ba, diese Theilgen erst müssen abgebrochen werden, welches eben diese Trennung schwierig macht. Das Exempel mit gläsernen, marmor-

marmornenen u. d. g. Platten kann also hier zur Erläuterung nicht gebraucht werden, weil solche mit ihren höchst glatten Flächen auf einander liegen. Wären sie nicht so glatt, sondern ziemlich rauch, und man preßte sie nun gleichfalls sehr stark auf einander, so werden zwar die auf ihren Ebenen hervorragenden Theilgen lange noch nicht so in einander greifen, wie bei der Röhre an ab und BA; aber es würde demohngeachtet ihr Zusammenhang durch die erstaunende Friktion nunmehr so groß werden, daß auch nach einer denen auf einander liegenden Flächen gleichlaufenden Richtung, eine sehr beträchtliche Gewalt erfodert würde, die Platten über einander wegzurutschen. Also fodert freilich das Losreisen von AB, ab, eine beträchtliche Gewalt; aber dieses Losreisen ist auch zum Springen der Röhre nicht nöthig. Die Röhre wird durch den bloßen Sprung nach Aa schon unbrauchbar, und diesen Sprung verhindert der Zusammenhang bei AB nicht.

§. 81. (K. §. 47-49.)

Das Resultat dieser Untersuchungen ist, insoferne die Röhrendicke nicht mit betrachtet wird, die wichtige Formel (K. 49. V.)

$$q = gr$$

Das heist:

Daferne die Röhre nicht bersten soll, so muß die Festigkeit (q) der Wand, dem Produkt aus dem Halbmesser (r) in die Kraft (g), welche in iedes Element druckt, gleich sein.

Die Brauchbarkeit dieses Satzes wird sich auf folgende Art näher ergeben. Weil der Druck auf iedes Element des Umfangs, g sein soll, so ist der Druck auf den ganzen Umfang = 3,141 · 2r · g; ist also die Röhre mit einer Wassersäule angefüllt, so hat man den wichtigen Satz:

An jedem Querschnitt der Röhre, verhält sich die Gewalt, womit die Wassersäule den innern Röhrenumfang druckt, zu der Gewalt, womit sie solche zu zersprengen strebt, wie 3,141 · 2rg : rg oder 3,141 · 2 : 1 also wie der Umkreis zum Halbmesser.

Kürzer, und wie es mir vorkömmt sinnlicher, liese sich dieser Satz vielleicht auch so darthun:

Der Druck, womit eine Waſſerſäule bei irgend einem Querſchnitt auf den ganzen Umfang wirkt, alſo den ganzen Umfang auszudehnen ſucht, verhält ſich zur Gewalt, womit ſie die Röhre zu zerſprengen d. i. womit ſie jeden Punkt des Umfangs vom Mittelpunkt zu entfernen ſtrebt, wie die Geſchwindigkeit, mit der ſich beim Ausdehnen der ganze Umfang ändert, zur Geſchwindigkeit, womit ſich der Halbmeſſer ändert, oder wie die Fluxion des Umkreiſes zur Fluxion des Halbmeſſers, alſo

wie d 3,141 · 2r : dr

wo r als veränderlich anzuſehen iſt, demnach

wie 3,141 · 2 · dr : dr

oder wie 2 · 3,141 : 1

d. i. wie der Umkreis zum Halbmeſſer.

Noch anders habe ich eben dieſen Satz (Erl. zu K. 78.) vorgeſtellt, wo ich überhaupt das Berſten der Röhren noch mehr begreiflich zu machen geſucht habe.

§. 82. (K. §. 56.)

Für die Ausübung wird es dann doch immer rathſamer bleiben, die von Belidorn angegebene Regel zum Grund zu legen, und alle übrige vorkommende Fragen, derſelben gemäß zu beantworten, ſ. die folgende Erl.

§. 83. (K. §. 58.)

Um die Anwendung auf hölzerne Röhren ſowohl, als auf metallene machen zu können, will ich folgendes bemerken:

I. Für hölzerne Röhren.

1. Nach den Muſchenbröckſchen Verſuchen iſt, wenn P die abſolute Feſtigkeit einer Materie bedeutet.

Für	Tannenholz,	P =	1,00
"	Erlen "	" =	1,66
"	Eichen "	" =	1,91
"	Büchen "	" =	2,08

ſ. Hrn. Hofr. Karſtens Statik 183. §.

2. Ich

2. Ich nehme als einen durch die Erfahrung bestätigten Satz an, daß eine 4zöllige tannene Röhre, auf eine Wasserhöhe von 5 Fusen meistens ihre erforderliche Festigkeit hat, wenn die Dicke ihrer Wand am schwächsten Ort $\frac{1}{2}$ Zoll beträgt. Man kann also die für alle Fälle der Ausübung hinreichend sichere Regel geben, daß für diesen Fall da, wo die Röhrenwand am dünnsten ist, ihre Dicke $d = \frac{3}{4}$ Zoll sein soll.

II. Für metallene Röhren.

3. Gleichfalls nach den Musschenbrökschen Versuchen ist

Für Blei,	P	=	1,0
" Kupfer,	"	=	10,3
" Meßing,	"	=	12,4
" Eisen,	"	=	15,5

s. H. H. Karsten a. a. O. 184. §. auch unten (K. §. 75.)

4. Aus der Erfahrung weis man, daß eine 12 Zoll weite bleierne Röhre bei einer Wasserhöhe von 60 Fusen, und bei einer Dicke von $\frac{1}{2}$ Zoll kaum mehr berstet, und Belidor fodert daher mit Recht, man soll für diesen Fall, um hinlängliche Sicherheit zu haben, die Röhrenwand $\frac{3}{4}$ Zoll dick nehmen.

§. 84. (K. §. 63.)

Die hier zwischen den Festigkeiten des Bleies und des Kupfers angegebene Verhältnis 1 : 30 weicht von der (Erl. zu 58.) angegebenen 1 : 10 sehr weit ab; weil indessen nach der 1 : 10 die kupfernen in der Ausübung dicker gemacht werden müssen, als nach der erstern, so wird solche für die Ausübung doch mehr Sicherheit verschaffen (s. K. §. 75.)

§. 85. (K. §. 64.)

Wenn nämlich die absolute Festigkeit der Materie gleich groß ist, so ist

$$T : n = ck : ee$$

also

$$T = \frac{ck}{ee} \cdot n$$

§. 86.

§. 86. (K. §. 65. 66.)

Wenn die Röhre von eben dem Gewicht T, wie die Platte, zerreisen soll, so müßte wohl QR nicht den Umfang sondern den Halbmesser der Röhre abgeben, daher ich diese Korrektion auch unter die Druckfehler gesetzt habe. Hätte alsdann diese Röhre eine Wassersäule von der Höhe h zu tragen, so wäre der Druck auf ihren Umfang = h · 3,141 · 2r · k. Also wäre die reisende Gewalt T (Erl. zu 49.) so groß, als das Gewicht einer Wassermenge = hrk oder wenn m das Gewicht eines C. Fuses Wasser ist, und alles in Fusen ausgedruckt wird, da dann a = 1 ist, so hat man

$$T = hrkm$$

also

$$h = \frac{T}{rkm}$$

Aber aus (K. 64.) ist

$$T = \frac{ck}{ee} \cdot n$$

also

$$h = \frac{\frac{ck}{ee} n}{rkm} = \frac{c \cdot n}{ee \cdot r \cdot m}$$

§. 87. (K. §. 68.)

Oder a = 1 gesetzt,

$$H = \frac{Cn}{ee \cdot R \cdot m} = \frac{C}{R} \cdot \frac{n}{ee \cdot m}$$

Man verwechselt nämlich nur H, C, R, mit h, c, r (K. §. 66.) Nun ist aber aus (66.)

$$\frac{n}{ee \cdot m} = \frac{hr}{c}$$

also

$$H = \frac{C}{R} \cdot \frac{hr}{c} \quad (h$$

Um

Um dieſe Formel vollkommener zu machen, müßte man noch den Umſtand wegen der Dicke der Röhrenwand mit in Betracht ziehen, und dieſerwegen $R + \frac{1}{2}C$ ſtatt R und $r + \frac{1}{2}c$ ſtatt r gebrauchen. Das gäbe

$$H = \frac{C}{R + \frac{1}{2}C} \cdot \frac{h \cdot (r + \frac{1}{2}c)}{c} \quad (♀$$

Es kommt aber hier noch eine andere Frage mit in Betrachtung: ob nicht die Feſtigkeit der Röhren für ſich in einer gröſſern Verhältnis wachſe, als die Dicke der Wand? Und es ſcheint wirklich aus der Art, wie ich ſolches im Beitr. zur Salzwerksk. vorſtellig gemacht habe, zu folgen, daß dieſe Feſtigkeit wirklich ſich nicht wie C ſondern wie $\frac{R + \frac{1}{2}C}{R} \times C$ verhalte. Das gäbe alſo nicht

$$H = \frac{C}{c} \cdot \frac{r + \frac{1}{2}c}{R + \frac{1}{2}C} \cdot h$$

ſondern

$$H = \frac{(R + \frac{1}{2}C) : R}{(r + \frac{1}{2}c) : r} \cdot \frac{C}{c} \cdot \frac{r + \frac{1}{2}c}{R + \frac{1}{2}C} \cdot h$$

oder

$$H = \frac{r}{R} \cdot \frac{C}{c} \cdot h$$

welches wieder die nämliche Formel (♄) iſt.

Wirklich kommen auch die Reſultate aus dieſer Formel mit der Erfahrung, welches ich beſonders wegen der hölzernen Röhren bemerke, ganz wohl überein, da im Gegentheil die Formel (♀) auf ungereimte Reſultate führt, ſobald man nur für ein beträchtliches H den Werth von C ſucht. Daher ich die Formel (♄) für die Ausübung mit aller Sicherheit gebrauchen zu können glaube. Sie iſt eine mittlere zwiſchen der (♀) und der im angef. Beitr.

Heiſt man die ſpec. Feſtigkeit der Materie, woraus die Röhre vom Halbmeſſer R beſteht, P; und die ſpec. Feſtigkeit der Materie, woraus die Röhre vom Halbmeſſer r beſteht, p; ſo hat man weiter

$$H = \frac{Cr}{Rc} \cdot \frac{P}{p} \cdot h$$

wo die ähnlichen groſſen und kleinen Buchſtaben ſich auf einerlei Einheiten beziehen müſſen.

Setzt man nun nach Erl. zu (58.)

	statt h	p	c	r
für hölzerne Röhren	5 Fus	1.	$\frac{3}{4}$ Zoll	2 Zoll
" metallene "	60.	1.	$\frac{3}{4}$	6

so hat man für alle vorkommende Fälle

Für hölzerne Röhren.

$$H = \frac{P \cdot C \cdot 2}{0{,}75 \cdot R} \cdot 5$$

oder 1) $$H = \frac{13{,}333 \cdot P \cdot C}{R}$$

Das giebt nun $HR = 13{,}333 \cdot P \cdot C$

also 2) $$C = \frac{HR}{13{,}333 \cdot P}$$

3) $$R = \frac{13{,}333 \cdot PC}{H}$$

Wäre ein zu einer Röhre zu bohrender Stamm gegeben, dessen Halbmesser $= \Delta$ wäre, so wäre

4) $$R = \Delta - C = \Delta - \frac{HR}{13{,}333 \cdot P}$$

also $$\left(1 + \frac{H}{13{,}333 \cdot P}\right) \cdot R = \Delta$$

und $$R = \frac{\Delta}{\left(1 + \frac{H}{13{,}333 \cdot P}\right)}$$

Für metallene.

$$H = \frac{P \cdot C \cdot 6}{0{,}75 \cdot R} \cdot 60$$

oder

oder 1.) $H = \frac{480 \cdot P \cdot C}{R}$

und daraus

2.) $C = \frac{HR}{480 \cdot P}$

3.) $R = \frac{480 \cdot PC}{H}$

da sich dann der Werth von P allemal aus Erl. zu 49. ergiebt.

1. Ex. Es soll eine 5 zöllige erlene Röhre den Druck einer 160 Fus hohen Säule süses Wasser aushalten; man sucht die nöthige Dicke der Wand.

Hier ist $P = 1,66$ (Erl. zu 49.),

$R = 2,5$

und $H = 160$

also $C = \frac{160 \cdot 2,5}{13,33 \cdot 1,66} = \frac{400}{22,132} = 18,07$ Zoll,

oder die Röhrenwand darf an keiner Stelle unter $1\frac{1}{2}$ Fuß dick sein.

Die Formel (♀) die eigentlich einen noch gröſsern Werth von c geben sollte, giebt hier

$$C = \frac{2 \cdot 2,5}{31,666 \cdot 0,0104 - 1} = -7,46 \text{ Zoll.}$$

Darin liegt gar keine Bedeutung, und so giebt diese Formel meistens, wie ich zuvor erinnerte, ungereimte Resultate, zum Beweis daß die daben zum Grunde gelegten Voraussetzungen allein zur Richtigkeit der Formel nicht hinreichen, und daß sie daher noch durch eine dergleichen Voraussetzung, wie ich hinzugesetzt habe, korrigirt werden müsse.

2. Ex. Auf die Frage (K. 67.) kommt hier folgende Antwort:

Es ist $P = 10,3$ (Erl. zu 49.), $R = 6$ Zoll,

und $C = \frac{2}{11 \cdot 12} = \frac{1}{66}$ Zoll, also

$$H = \frac{480 \cdot 10,3 \cdot \frac{1}{88}}{6} = \frac{80 \cdot 10,3}{66} = \frac{824}{66} = 12\frac{1}{2} \text{ Fus.}$$

Es ist aber $\frac{1}{88}$ Zoll etwa die Dicke von einem Bogen Roialpapier, und auf eine Höhe von $12\frac{1}{2}$ Fusen wird auch wohl kein Künstler zu einer 12 Zoll weiten Röhre eine Kupferplatte zu nehmen sich wagen, die nicht dicker als ein solcher Bogen Papier ist.

Für eine Höhe von $33 \cdot 12\frac{1}{2} = 412,5$ Fus betrüge nach dieser Rechnung die erfoderliche Dicke der Röhrenwand $33 \cdot \frac{1}{88} = \frac{1}{2}$ Zoll. Im Buch aber wird bei diesem Ex. die zu der Dicke von $\frac{1}{88}$ Zoll gehörige Wasserhöhe schon $= 518$ Fus gefunden. Aber der Hr. Hofr. hat dadurch blos die Anwendung vorhergegangener Sätze erläutern wollen, ohne Regeln für die Ausübung vorzuschreiben.

Daß die Formeln, welche ich angegeben habe, allemal hinreichend sichere Resultate für die Ausübung geben, erhellet aus der dabei zum Grund gelegten hinlänglich sichern Erfahrung (Erl. zu 49. no. 4.) und denen angenommenen Werthen von P (a. a. O. no. 3.) wo die Verhältnis der Festigkeit der übrigen Metalle gegen der des Bleies weit geringer als im Buch angegeben ist. Belidor in seiner Archit. hydr. scheint wegen der Ausübung etwas zu furchtsam zu seln. Er giebt in verschiedenen Tafeln die Dicken der Röhrenwände noch beträchtlich stärker an, als sie sich nach denen Rechnungen hier ergeben, und noch mit der Erinnerung, daß man in der Ausübung seine Zahlen noch um die Hälfte grösser nehmen solle. Ich erinnere übrigens noch, daß diese Rechnungen eigentlich nur ruhig stehendes Wasser voraussetzen. Untersuchungen über den Druck, den durchfliesendes Wasser auf die Röhrenwände ausübt, kommen unten (K. §. 628. u. folg.) vor. Bei Pumpen und besonders bei Druckwerken, wodurch Wasser sehr schief aufwärts gedruckt wird, sind ganz besondere Rechnungen nöthig, die aus (K. 628 u. f.) hergeleitet werden müssen *). Die Dicke der

*) Wer hieraus schliesen wollte, daß also die bisherigen Untersuchungen unnütz wären, würde zu übereilt schliesen. Einmal wird auch bei bewegten Wasser der Druck auf die Röhrenwand doch allemal durch den Druck einer

der Röhrenwand ist allemal zugleich eine Funktion von der Geschwindigkeit und Richtung des fortgedruckten Wassers, und allgemeine Tafeln für diese Dicke, lassen sich also bei Pumpwerken gar nicht angeben, obgleich Belidor den Gebrauch seiner, bei allen Druckwerken empfiehlt. Eine Abhandlung über die nöthige Dicke der Stiefeln und Steigröhren bei Druckwerken, wobei aber die Formeln des Beitr. zur Salzw. zum Grund liegen, findet sich in dem ietzt noch ungedruckten Band derer Actor. Acad. Erfurd. Die dortigen Formeln lassen sich leicht denen hier angenommenen Voraussetzungen gemäß verändern.

§. 87. (K. §. 72.)

Eben das Zersprengen der metallenen Röhren beweist, wie wenig sich die absolute Festigkeit der Metalle allgemein bestimmen läßt. Eine Röhre, die noch so gleich dick und rund ist, wird doch immer an irgend einer Stelle bersten. Wäre sie überall gleich fest, so müßte sie an allen Stellen eines gewissen Querschnitts zugleich bersten, und könnte eben deswegen nirgends zerreisen. So aber bricht die reisende Gewalt da los, wo sie den geringsten Widerstand findet. Sobald sie auf solche Art die Röhre irgendwo zersprengt hat, nimmt ihre Grösse ab, sie kann aber dennoch groß genug bleiben, die beiden nun von einander zerrissenen Eben ab, cd (fig. 13.) die vor dem Bersten wider einander lagen, noch weiter von einander zu entfernen, und wenn auf solche Art die Oefnung abdc nur einige beträchtliche Breite bekommt, so sieht man wohl, daß die Röhrenwand auch an der gegenüberstehenden Stelle f nach dem Winkel cfg gar bald bersten könne. Das ist auch der gewöhnliche Fall bei Gewehren und Stücken, die durchs Losfeuern zersprengt werden; sie werden meistens in zwo Hälften von einander bersten. So verstanden verlöhre auch der Eulersche Satz: daß die Kanonen der Gefahr zu zerbersten ꝛc. das Sonderbare.

einer gewissen stillstehenden Wassersäule bestimmt; um also die Dicke der Röhrenwand für durchfliesendes Wasser zu berechnen, muß man doch allemal zu berechnen wissen, wie dick die Wand sein muß, um den Druck einer gewissen stillstehenden Wassersäule, gehörigen Widerstand zu leisten. Fürs andere hat man bei Röhrenleitungen zu bedenken, daß das darin befindliche Wasser öfters doch wirklich ruhig darin stehen muß, wenn z. B. die Grundkännel in einem Teich verschlossen wird. Und es fällt in die Augen, daß man, wo solche Fälle vorkommen können, die Dicke der Röhrenwände doch allemal für den Fall berechnen müsse, wo die Röhren den stärksten Druck auszuhalten haben d. i. für den Fall, wo sie mit ruhig stehendem Wasser angefüllt waren. (K. 635.)

§. 88. (K. §. 75.)

Ueberhaupt läßt sich aus Hrn. B. Versuchen gar nichts mit Zuverläßigkeit schliesen, nicht einmal mit der Sicherheit, der Wahrheit nur um die Hälfte beizukommen. Kleine Fehler bei Ausmessung so geringer Grössen, wie $\frac{1}{111}$ Linie ist, sind unvermeidlich, und werden erst durch weitere Anwendungen aufs Grössere ziemlich beträchtlich. Ob die Dicke wirklich nur $\frac{1}{111}$ oder ob sie $\frac{1}{100}$ Linie betragen hat, konnte Hr. B. mit Zuverläßigkeit nicht bestimmen, da $\frac{1}{100} - \frac{1}{131} = \frac{1}{423}$ Linie eine Grösse ist, die auch für unsere schärfsten Abmessungen immer unmerklich bleibt. Schon dieses Umstandes wegen, könnte die Festigkeit eine ganz andere sein, als die Hr. B. aus seinen Versuchen geschlossen hat. Dazu kommt nun noch, daß die Verschiedenheit eines und ebendesselben Metalles in Absicht der Festigkeit, bei so kleinen Theilgen weit beträchtlicher sein kann, als im Grossen. Vielleicht hätte eine andere bleierne Platte von so geringer Dicke ein ganz anderes Gewicht ausgehalten, als gerad die gebrauchte, dahingegen im Grossen dieser Unterschied kein so beträchtlicher Theil der Gewichte sein kann, so wie wohl ein Hanffaden doppelt soviel als ein anderer von gleicher Dicke tragen kann, dicke Seiler von einerlei Dicke aber meistens ziemlich gleiche Gewichte zu tragen vermögen. s. Hr. Hofr. Karst. Stat. 182. § Also geben die Bernoullische Versuche wirklich gar nichts für die Ausübung brauchbares, und die Muschenbrökische verdienen immer noch den Vorzug.

§. 89. (K. §. 76.)

Aber die Voraussetzung, daß sich die Festigkeit der Wand wie ihre Dicke C verhält kann mit dem, was (K. 49.) erwiesen worden ist, ohnmöglich bestehen. Sie führt auf Ungereimtheiten, wie ich (Erl. zu 68. 1. Ex) gewiesen habe, und beweist dadurch hinlänglich ihre Unrichtigkeit. Und weil gegentheils die Voraussetzung, daß sich die Festigkeit der Wand völlig so wie die reisende Gewalt (K. 49. VII.) verhält, Resultate giebt, die der Erfahrung gar wohl gemäß sind, so kann wohl diese Voraussetzung selbst, als ein Erfahrungssatz angesehen werden. Wie dieses zugehen kann, kann man sich durch folgende Vorstellung erläutern.

$\alpha\beta$ (fig. 13.) sei die Ebene, worin bei dem Bersten die zwo Flächen ab, cd, sich von einander losreisen; stellt man sich nun statt der Kraft, womit die einzeln Theilgen von c bis d mit denen von a bis b in $\alpha\beta$ zusammenhängen,

gen, Gewichte μ vor, womit iedes dieser Theilgen in cd an die Fläche ab angedruckt wird, so daß bei dem Berſten der Röhre, diese Gewichte μ, aus der Lage $\alpha\beta$, in die Lage cd gedruckt werden müſſen, gedenkt man ſich ferner, daß die reiſende Gewalt nach (K. 49. VII.) die ich hier Q nennen will, auf iedes dieſer Gewicht μ völlig ſo wirkt, als wäre μm, wo m der Mittelpunkt iſt, eine mathematiſche Stange, die ſich um m drehen lieſe, an deren Ende die Kraft Q nach der auf αm ſenkrechten Richtung $\mu\nu$ zöge, ſo fällt in die Augen, daß Zuſammenhang der Wand und reiſende Gewalt hier völlig ſo wirken, wie Kraft und Laſt an einem einſeitigen Hebel (v. homodromo) wo aber Kraft und Laſt an einerlei Stelle angebracht ſind. Alſo hat die reiſende Gewalt Q, wirklich auf alle Theilgen μ zwiſchen α und β, einerlei Wirkung und die Formel (h hier §. 87.) hat daher keine weitere Korrektion nöthig.

§. 90. (K. §. 78.)

Seite 50. ſondern die Drückung . . . berſtet ꝛc. oder deutlicher: ſondern die Wirkung von der Summe aller dieſer Drückungen auf die Stelle, wo die Röhre berſtet. Eigentlich äuſert ſich nun dieſe Wirkung an ieder Stelle des Umfangs, und es müſſen ſich daher alle dieſe Wirkungen zuſammen, wenn die Röhre in allen Punkten eines Querſchnitts gleich feſt, gleich rund und gleich ſtark gedruckt iſt, einander aufheben, ſo, daß die Röhre nirgends berſten könnte (Erl. zu K. 72.), wenn gleich die Feſtigkeit der Materie noch ſo unbeträchtlich wäre. Daß ſie aber doch wirklich berſtet, rührt daher, weil die eben erwähnten Vorausſetzungen in der Ausübung bei keinem einzigen Querſchnitt in der Schärfe gelten, die hier erfodert würde. In iedem Querſchnitt giebt es gewiß eine Stelle, die nicht mit allen übrigen eben dieſes Kreiſes, völlig einerlei iſt, alſo können ſich auch bei keinem Querſchnitt der Röhre, alle die genannten Wirkungen zuſammen aufheben, ſondern die ſchwächſte Stelle, muß von der Wirkung auf ſie berſten, inſoferne die eigene Feſtigkeit der Materie, woraus die Wand beſteht, ſolches nicht verhindert. Wie ſich nun die hier erwähnte Summe aller Drückungen, zu der Wirkung von dieſer Summe auf eine einzelne Stelle $\alpha\beta$ (fig. 13.) d. i. der geſammte auf den innern Umfang ſenkrechte Druck zur reiſenden Gewalt verhält, läßt ſich, wie mir vorkommt, noch am ſinnlichſten auf folgende Art erkennen. α f gehe durch den Mittelpunkt m, und $\beta\gamma$ ſei der innere Durchmeſſer, ſo iſt der Waſſerdruck auf den Halbkreis $\beta b\gamma$ nach einer auf $\beta\gamma$ ſenkrechten Richtung genommen, nach den Lehren der Hydroſt. dem Druck auf $\beta\gamma$ gleich, und ſo der Druck auf $\beta d\gamma$ gleichfalls ſo groß. Die linke Hälfte des Rings wird alſo von der rechten mit einer

einer Kraft losgerissen, die dem Wasserdruck auf $\beta\gamma$ gleich ist, den ich P nennen will. Daß nämlich auch des Rings rechte Hälfte von der linken mit der nämlichen Kraft P losgerissen wird, hat nur den Effekt, daß die Kraft zur Linken völlig wirken kann, da, wenn nicht zur Rechten eine gleiche Kraft entgegen zöge, der ganze Ring sich nach der linken Hand zu bewegen müßte, und die Kraft zur Linken also, auf das Voneinanderreisen beider Hälften, gar keine Wirkung hätte. Man kann also nicht sagen, daß eine Kraft P + P beide Hälften des Rings von einander zu reisen strebt, sondern nur die einfache Kraft P; das Wasser strebt also beide Hälften des Rings bei $\alpha\beta, \gamma f$ zusammen mit einer Kraft = P senkrecht auf αf zu trennen, und da diese Kraft auf $\alpha\beta$ und γf gleichstark vertheilt sein muß, so ist die reisende Gewalt, welche den Ring an jeder Stelle wie $\alpha\beta$ zu zerreisen strebt, $= \frac{1}{2}$ P. Es ist aber die Summe aller auf den ganzen innern Umfang des Rings senkrechten Drückungen $= 3{,}141 \cdot$ P, also

der ganze auf den Umfang des Rings senkrechte Druck	reisenden Gewalt	$= 3{,}141 \cdot P : \frac{1}{2} P$
		$= 3{,}141 : \frac{1}{2}$

oder wie der Umfang zum Halbmesser, völlig wie (K. §. 49.). Sobald also die schwächste Stelle im Umfang vom Querschnitt des Rings, die hier $\alpha\beta$ andeuten kann, einen Zusammenhang hat, der kleiner, als die reisende Gewalt ist, so muß die Röhre an dieser Stelle bersten.

§. 91. (K. §. 102.)

weiter als aus ... darunter ꝛc. Aber die Formel $f^2 = AB^2 \cdot \frac{CA^2}{NA^2}$ ist nicht auf den Fall eingeschränkt, daß N unter C läge, und sie müßte eigentlich allgemein für iede Stelle, sie mag über oder unter C liegen, gelten. Sobald aber N über C liegt wird $NA > CA$, also $\frac{CA^2}{NA^2}$ ein eigentlicher Bruch und daher

$$f^2 < AB^2$$

da hingegen für iede Stelle N unter C

$$f^2 > AB^2$$

ist. Das widerspricht nun offenbar dem in eben diesem §. zuvor angenommenen Erfahrungssatz: so sprützt es aus O eben dahin. Es kann also die Formel

Formel für f^2 nicht richtig sein, wie man auch bald findet. Es sei die der Geschw. in C zugehörige Höhe = h, so verhalten sich die den Geschwindigkeiten zugehörigen Höhen, wie die wirklichen Wasserhöhen, also wenn die zu der Geschwindigkeit des bei C herausströhmenden Wassers gehörige Höhe c heist,

$$c : h = HN : HC$$

Nun ist allgemein (K. 83.)

$$h = \frac{f^2}{4 \cdot CA}$$

also $$c : \frac{f^2}{4 \cdot CA} = HN : HC$$

und $$f^2 = 4 \cdot CA \cdot c \cdot \frac{HC}{HN}$$

und da $HC = AC$ sein soll, so hat man

$$f^2 = 4 \cdot CA \cdot c \cdot \frac{AC}{HN}$$

$$= 4 \cdot CA^2 \cdot \frac{AB^2}{4 \cdot NA} \cdot \frac{1}{HN}$$

oder $$f^2 = \frac{CA^2}{NA \cdot NH} \cdot AB^2$$

Nun ist nach (An. d. Un. §. 157.) allemal

$$CA^2 > NA \cdot NH,$$

also $$\frac{CA^2}{NA \cdot NH} > 1$$

und daher allemal

$$f^2 > AB^2 \text{ oder } f > AB.$$

nach dem vorhin erwähnten ꝛc. und wie auch unmittelbar aus der gehörig verbesserten Formel für f^2 folgt.

§. 92. (K. §. 103.)

Seite 71. daß alsdann in der Zeit ꝛc. Ob dieses seine Richtigkeit hat, läßt sich auf folgende Art untersuchen:

Man ziehe eine gerade Linie EA (fig. 14.), und nehme auf ihr EL, EB, EH wie (im Buch fig. 14.) die zu EH gehörige Geschw. ist nach den Lehren der höh. Mechan. (*) $= 2\sqrt{15,625} \cdot EH$; man ziehe also senkrecht auf EH die $hH = 2\sqrt{15,625} \cdot EH$, so ist Hh die erwähnte Geschwindigkeit. Eben so giebt $lL = 2\sqrt{15,625} \cdot EL$ die zur Höhe EL gehörige Geschw. und so überhaupt $Zz = 2\sqrt{15,625} \cdot EZ$ die zu ieder Höhe EZ gehörige Geschwindigkeit; heißt also iedes EZ, x; iedes Zz, y; so ist allgemein

$$y = 2\sqrt{15,625} \cdot x$$

oder $$y^2 = 4 \cdot 15,625 \cdot x = 62,5 \cdot x$$

Demnach liegen alle Punkte, wie h, b, l u. s. w. in einer apollonischen Parabel, deren Parameter $= 62,5$ ist. Man quadrire also das parabolische Stück hHLlh und dividire solches durch HL, so hat man die mittlere Geschw. Es ist aber bekanntlich

$$hHLlh = \tfrac{2}{3}(EC \cdot Ll - EH \cdot Hh)$$

also die mittlere Geschw. mit der das Wasser bei E hervorspringt, $=$

$$\frac{\tfrac{2}{3}(EL \cdot Ll - EH \cdot Hh)}{HL}$$

$$= \frac{\tfrac{2}{3}(EL \cdot 2\sqrt{15,625} \cdot EL - EH \cdot 2\sqrt{15,625} \cdot EH)}{EL - EH},$$

$$= \frac{2 \cdot (2\sqrt{15,625}) \cdot (EL \cdot \sqrt{EL} - EH \cdot \sqrt{EH})}{3 \cdot (EL - EH)} \quad (\hbar$$

d. h. wenn das Wasser von L bis H sinkt, so ist dieses die Geschwindigkeit mit der man annehmen kann, daß das sämmtliche zwischen L und H befindlich gewesene Wasser bei E herausgeloffen ist; es würde nämlich, wenn es vom Anfang des Auslaufens bis zu Ende diese Geschw. hätte, in eben der Zeit herauslaufen, in welcher es bei seiner wirklichen veränderlichen Geschw. herauslauft.

*) Beim Vortrag der Hydrod. sollte man wohl die Lehren der höhern Mechanik überall als bekannt voraussetzen dürfen. Und wer den Satz höh. Mechan. I Abschn. 40 Aufg. kennt, wird auch diesen hier, leicht daraus folgern, s. unten (K. 152.) wo g die bekannte Zahl 15, 625 F. bedeutet.

kauft. Wird aber das Wasser während dem Auslaufen beständig bei B erhalten, so ist seine Geschwindigkeit bei E $= 2\sqrt{15,625} \cdot EB$ die offenbar mit der vorigen nicht einerlei ist, folglich kann auch die Zeit, in der das Wasser von L bis H bei E auslauft, mit der Zeit, worin eben so viel Wasser, das durch beständiges Zugiesen immer bei B erhalten wird, bei E herauslauft, nicht einerlei sein, wenn gleich beide Zeiten einander sehr nahe kommen können. Ich habe die Sache hier erst so vortragen wollen, um bei dieser Gelegenheit die sehr nützliche Formel (♄) beibringen zu können. Sonsten gäbe sich der letzte Satz unmittelbar so:

Bekanntlich ist die Zeit t, die der Höhe x zugehört d. i. in der ein schwerer Körper durch die Höhe x herabfällt $= \sqrt{\frac{x}{15,625}}$ oder

$$\frac{1}{15,625} \cdot x = t^2$$

Man verzeichne also eine apoll. Parabel, deren Parameter $= \frac{1}{15,625}$ ist, und die vor. Fig. sei eine solche Parabel, so ist die zu jeder Abscisse EZ gehörige Ordinate Zz = t, also das zur Bewegung durch HL = EL — EH gehörige t =

$$\left(\sqrt{\frac{EL}{15,625}}\right) - \left(\sqrt{\frac{EH}{15,625}}\right)$$

$$= \frac{(\sqrt{EL}) - (\sqrt{EH})}{\sqrt{15,625}}$$

wenn nämlich der Querschnitt des bei E hervorspringenden Strahls, der n heisen soll (*) dem durchaus gleich weiten Querschnitt des Gefässes C, der m heisen soll, gleich wäre. Sonst wäre allgemeiner

$$t = \frac{m(\sqrt{EL} - \sqrt{EH})}{n\sqrt{15,625}} \quad (♀$$

*) Ich habe mit Bedacht den Querschnitt n des hervorspringenden Wasserstrahls und nicht die Grosse der Oefnung bei E genannt, weil es nur auf jenen hier ankommt, der wie die folgende Versuche näher ergeben, kleiner als die Oefnung E ist; er verhalt sich zu solcher nach Hrn. B. (K. 142.) wie 1,41 : 1 ob es gleich sicherer ist, sie in iedem Fall besonders zu messen.

Aber die Zeit, in der das zwiſchen L und H befindliche Waſſer beſtändig mit der Geſchwindigkeit $2 \cdot \sqrt{15{,}625} \cdot EB$ bei E ausflöſſe, wäre bekanntlich

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{HL}{2\sqrt{15{,}625} \cdot EB} = \frac{m \cdot (EL - EH)}{n \cdot 2 \cdot \sqrt{15{,}625} \cdot EB} =$$

$$\frac{m \cdot (EL - EH)}{n \cdot 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{EH + EL}{2}\right) \cdot 15{,}625}} = \frac{m \cdot (EL - EH)}{n \cdot \sqrt{15{,}625} \cdot \sqrt{2 \cdot (EH + EL)}} \; (\frac{1}{8}$$

welches mit dem Werth von t (♀) offenbar nicht einerlei iſt. Es iſt nämlich der Werth aus (♀)

$$= \frac{m\,(\sqrt{EL} - \sqrt{EH}) \cdot (\sqrt{EL} + \sqrt{EH})}{n \cdot \sqrt{15{,}625} \cdot (\sqrt{EL} + \sqrt{EH})}$$

$$= \frac{m \cdot (EL - EH)}{n \cdot \sqrt{15{,}625} \cdot (\sqrt{EL} + \sqrt{EH})}$$

$$= \frac{m \cdot (EL - EH)}{n \cdot \sqrt{15{,}625}} \cdot \frac{1}{\sqrt{EL} + \sqrt{EH}}$$

aus (♁) aber

$$= \frac{m \cdot (EL - EH)}{n \cdot \sqrt{15{,}625}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot (EH + EL)}}$$

alſo die Verhältnis des Werths (♀) zu dem (♁)

$$= \sqrt{2 \cdot (EH + EL)} : (\sqrt{EL} + \sqrt{EH})$$

die freilich der Verhältnis der Gleichheit ſehr nahe kommen kann.

1 Ex. Es ſei EL = 13 Fus + 1 Zoll = 157 Z.
EH = 13 Fus − 1 Z. = 155 Z.

ſo iſt die Verhältnis der Zeit (♀) zu der (♁)

$= \sqrt{2 \cdot (155 + 157)} : (\sqrt{157} + \sqrt{155})$
$= \sqrt{624} : (\sqrt{157} + \sqrt{155})$
$= 24{,}98 : (12{,}53 + 12{,}45)$
$= 2498 : 2498$

wo

wo wirklich die Zeiten noch nicht um 0,01 Sec. verschieden sind. Der Satz im Buch ist also zwar der mathematischen Schärfe nicht vollkommen gemäß. Er kommt aber der Wahrheit desto näher, ie kleiner EH gegen LE ist, und kann im Gegentheil von der Wahrheit doch merklich abweichen, wenn EH einen beträchtlichen Theil von LE ausmacht.

2. Ex. Es sei EH = 4 Fus, LE = 9 F. so ist die Verhältnis der Zeiten

$$= \sqrt{2 \cdot (4 + 9)} : (\sqrt{9} + \sqrt{4}) = 51 : 50$$

Hätte also Mariotte $\frac{EH}{EL}$ so genommen, so würde er nicht in beiden Fällen 60 Sec. sondern im ersten Fall zwischen 61 und 62 Sec. gefunden haben. Weil aber M. gewiß LH gegen LE nur sehr klein wird genommen haben, so konnte für beide Versuche der Unterschied der Zeiten freilich nicht bemerkt werden, und dienten daher wirklich einander zur Bestätigung.

Soll übrigens das Wasser in einem Gefäß gleichförmig d. i. in gleichen Zeiten gleich tief sinken, so fällt in die Augen, daß des Gefäßes Querschnitte über der Oefnung des Gefässes, von der Oefnung an, eben so mit der Höhe x zunehmen müssen, wie die Geschwindigkeit mit der Höhe zunimmt, also wie $\sqrt{x}$. Denn wie alsdann des Wassers Geschwindigkeit im Sinken abnimmt, so nimmt auch die Grösse des Querschnitts, der da sinkt, ab; es wird also m veränderlich aber $\frac{n}{m}\sqrt{x}$ oder $\frac{\sqrt{x}}{m}$ unveränderlich. AGC (fig. 15.) sei ein solches rundes Gefäß, das unten bei E mit einer kleinen Oefnung n versehen ist, iedes auf EL genommene Stück EH, heise x, und das zugehörige H M, y, so ist des Gefässes Querschnitt, der auf des Gefässes Axe senkrecht durch H geht, $= 3{,}141 \cdot y^2 = m$, und weil nun $\frac{\sqrt{x}}{m}$ eine beständige Grösse, die ich a nennen will, sein soll, so hat man

$$a = \frac{\sqrt{x}}{m} = \frac{\sqrt{x}}{3{,}141 \cdot y^2}$$

also $$\frac{1}{3{,}141 \cdot a} \cdot \sqrt{x} = y^2$$

Folglich iſt die Ebene ALCEA eine höhere Parabel, bei der man die beſtändige Gröſſe $\frac{1}{3,141 \cdot a}$ analogiſch den Parameter nennen kann, und das Gefäß worin Waſſer in gleichen Zeiten gleich tief ſinken ſoll, muß das Sphäroid einer höhern Parabel ſein, das eine nur ſehr kleine Oefnung genau im Scheitelpunkt E haben darf.

Der oberſte Querſchnitt dieſes Gefäſſes ADCGA heiſe b, ſo iſt des Waſſers Geſchwindigkeit an dieſem Querſchnitt

$$c = \frac{n}{b} \cdot 2 \sqrt{15,625 \cdot EL}$$

und weil für dieſes Gefäß c unveränderlich iſt, ſo iſt ſie nun an ieder Stelle

$$= \frac{n}{b} \cdot 2 \sqrt{15,625 \cdot EL}$$

oder das Sinken der Oberfläche des Waſſers von L bis E geſchieht gleichförmig. Demnach iſt die Zeit, in der das ſämmtliche Waſſer durch E herauslauft

$$t = \frac{EL}{\frac{n}{b} \cdot 2 \cdot \sqrt{(15,625 \cdot EL)}}$$

$$= \frac{b \sqrt{EL}}{n \cdot \sqrt{62,5}} \text{ Sec.}$$

und wenn man nun t, n, und b gehörig annimmt, ſo läßt ſich EL daraus beſtimmen, das ſich aber auf Fuſe beziehen muß, weil die Zahl 15,625 ſich bekanntlich gleichfalls auf Fuſe bezieht.

Ex. Es ſoll t = 1 St. = 3600 Sec., n = 1 Quadr. Linie und b = $\frac{1}{3}$ Q. F. = 36 Q Zoll = 36 × 144 = 5184 Q. Linien ſein, man ſucht EL

Aufl. Hier iſt

$$EL = \left(\frac{t \cdot n \cdot \sqrt{62,5}}{b}\right)^2$$

$$= \frac{62,5 \cdot 3600^2}{5184^2}$$

Nun

Nun ist $l\ 62,5 = 0,279588$

Add. $2\ l\ 3600 = 7,112605$

Summe $= 7,392293$

Abgez. $2\ l\ 5184 = 3,429330 + 4$

Differ. $= l\ EL = 3,962963 - 4$

die zu 3,962963 gehörige Zahl ist nach den gemeinen Tafeln = 9183, also wegen der Zahl − 4,

$EL = 0,9183$ Fus $= 132,235$ Lin.
$= 11$ Zoll $0,235$ Lin.

des Querschnitts b Halbmesser AL ist bekanntlich $= \sqrt{\frac{5184}{3,141}} = \sqrt{1650,4}$ = 3 Zoll 4,62 Lin. oder sein Durchmesser = 6 Z. 9,24 Lin.

Man verzeichne also die höhere Parabel AEC, deren Parameter alles in Linien ausgedruckt, $= \frac{y^2}{\sqrt{x}} = \frac{AL^2}{\sqrt{EL}} = \frac{1650,4}{\sqrt{132,2}} = 143,5$ Linien ist, durch die Formel $y = \sqrt{143,5} \cdot \sqrt[4]{x}$, und lasse nach dieser Rundung ein Gefäß aushöhlen; solches fülle man auf die Höhe EL = 11 Zoll 0,23 Linien mit Wasser an, und versehe es unten bei E mit einer viereckten Oefnung, von der iede Seite $\sqrt{(1,14 \cdot 1\ \text{Q. Linie})} = 1,07$ L. beträgt damit des Strahls Querschnitt 1 Q. Linie groß werde. Man befestige über das neben dran einen in 60 gleiche Theile getheilten Maasstab, so wird nun das sämmtliche Wasser alle Stunden auslaufen, und die Anzahl der Theilgen auf dem Maasstab, welche zeigen um wieviel der Wasserspiegel gesunken ist, giebt zugleich die Minuten an. Läßt man unten bei E ein völlig ähnliches Gefäß mit eben der Oefnung, die genau auf E passen muß, anschliesen, und beide Gefässe bei AC, ac gehörig verschliesen, so kann man dieses doppelte Gefäß von Stund zu Stund umkehren und also ohnunterbrochen damit die Zeit abmessen, da man kleinen Aenderungen, die sich etwa wegen des Widerstandes der Luft und anderer Hindernisse in der Ausübung zeigen würden, durch einige Proben leicht würde abhelfen können.

Hierin

Hierin liegt die ganze Theorie von Wasseruhren. Sehr feiner Sand kommt der Natur des Flüßigen nahe, und darauf gründet sich der Gebrauch der Sanduhren, der aber durch die mehr oder weniger beträchtliche trichterförmige Höhle, die sich in des Sandes Oberfläche beim Auslaufen bildet, welches doch bei flüßigen Materien nicht geschieht, sehr unzuverläßig wird.

Ich habe übrigens in denen Sätzen hier nur den Satz (K. 101.) zum Grund gelegt, also weiter nicht auf unerwiesene Sätze gebauet. Die folgenden Versuche bestätigen nun noch diesen Satz (101) mit seinen Folgen.

§. 93. (K. §. 109.)

Man hat beim Gebrauch der Logarithmen zu bemerken, daß solche wegen ihrer Irrationalität nie die **wahren** Zahlen geben, sondern nur solche, welche den wahren sehr nahe kommen, daher man auch den Gebrauch der Logarithmen, selbst in Absicht auf die Kürze der Rechnung eben nicht **ohne Unterschied**, der Rechnung mit den Zahlen selbst vorziehen darf. Wirklich ist hier im Buch ein hierhergehöriges Exempel. Die Zahl $\frac{93}{62}$ ist nicht um ein sehr **weniges geringer**, als 1,500 sondern $= \frac{93 : 31}{62 : 31} = \frac{3}{2}$ also **genau** $= 1{,}500$ und so findet man ohne Logarithmen $\sqrt{\frac{37}{16{,}5}} = \sqrt{2{,}24242424 \cdot \cdot}$ $= 1{,}4974 \cdot \cdot$ also beider Zahlen Unterschied $= 1{,}5000 - 1{,}4974 \cdot \cdot$ kleiner als 0,0026.

§. 94. (K. §. 110.)

und bei gleichen Wasserhöhen ꝛc. Dieses ist wohl ein Schreibfehler und sollte heisen: **und bei gleichen Oefnungen, durch welche das Wasser herausläuft** ꝛc. Daher ich solches auch unter die Druckfehler gesetzt habe.

§. 95. (K. §. 142.)

diese Verhältnis ꝛc. aber nicht der Durchmesser, sondern der Flächen oder Querschnitte selbst.

§. 96.

§. 96. (K. §. 163.)

noch nicht der vierte Theil ꝛc. Es ist $\frac{46,875}{4} = 11,718$ also die gesuchte Höhe 11,8 etwas grösser als der vierte Theil der Wasserhöhe.

(K. §. 169.)

Die 14 fig. muß so bezeichnet werden, wie hier (fig. 16.). Uebrigens sind diese Sätze hier für $b = o$ mit denen oben (Erl. zu K. 103.) ohne die Anal. d. Un. erwiesenen (denn die Quadratur der Parabel findet sich in den Erl. der An. endl. Gr. S. 418.) völlig einerlei, und für $b > o$, wie es mir vorkommt, Einwendungen ausgesetzt. Man erlaube mir meine Gedanken darüber zu sagen und verzeihe mir, wenn ich irre.

Die hiesigen Formeln gründen sich auf die Voraussetzung, der sinkenden Oberfläche Verhältnis zur Oefnung E, sei eine beständige Verhältnis $= m : n$; das findet aber nur solange statt, als das Wasser noch über dem Boden des prismatischen Gefässes steht; wird nämlich $x = b$, so verwandelt sich auf einmal die Grösse m in den Querschnitt der Röhre, und nun ist es also nicht mehr verstattet, die Formeln im Buche zu gebrauchen. Ueberhaupt setzt eigentlich die Formel voraus, es soll ieder Querschnitt des Gefässes bis an die Oefnung bei $E = m$ sein, und daß nun die Werthe von x von dieser Oefnung bei E an gerechnet werden; und weil das hier nicht weiter als bis auf $x = b$ statt hat, so trift auch die Formel für t nicht mehr für $x < b$ zu, wie in die Augen fällt. Aber auch für $x > b$ leidet sie wohl eben die Einwendungen. Wie die Röhre von A bis E beschaffen ist, giebt die Formel gar nicht an; ihre Richtigkeit erfodert doch schlechterdings, daß auch der Röhre ihre Querschnitte von A bis E durchgängig $= m$ und nur die Oefnung bei $E = n$ sein, und da solches hier nur bis an A zutrift, so könnte die Röhre von A bis E ganz verschiedene Querschnitte haben; es könnte selbst die Oefnung bei A viel kleiner, als die bei E sein — denn von dem allem ist bei den Schlüssen im Buche nichts gesagt — und dann wäre doch wohl die Unrichtigkeit der gegebenen Formel nicht zu läugnen, obgleich wirklich dieser Fall (K 175.) vorkommt. Und wie sollte auch das Auslaufen bei A, inſofern ſolches blos von des Waſſers Schwere herrührt, dadurch geändert werden, daß man nur dieſes herabfallende Waſſer durch eine Röhre laufen lieſe? Einen kleinen Umſtand, den ich bei (K. §. 170.) erwähne, beiſeitgeſetzt, verhält ſich das Sinken hier völlig ſo, als ob die Röhre, die ohnehin

doch wohl gleichweit angenommen wird, gar nicht verhanden wäre und das Wasser so blos aus A herausschösse und unten bei E aufgefangen würde. Also müßte man wohl, richtig zu verfahren, b = o setzen, und so, die Formeln gehörig verwandeln. Daß aber gleichwohl der Erfahrung gemäß, das Gefäß geschwinder mit der Röhre, als ohne sie, ausgeleert wird, kann von andern Ursachen herrühren, wie in der Folge noch gewiesen werden wird. *)

§. 97. (K. §. 170.)

befände sich noch die Röhre voll Wasser ꝛc. Das folgt, wenn n : m eine beständige Verhältnis bis an die Oefnung bei E wäre. Hier aber, wo dieses nicht ist, verhält sichs wohl anders. Indem man nämlich die Mündung bei E öfnet, fällt zuerst das in der Röhre AE befindliche Wasser heraus, wie ieder schwere Körper fällt, so, daß der oberste Querschnitt A der Wassersäule AE **für sich betrachtet**, in Zeit von einer Sec. 15,625 Rhl. F. durchlaufen würde. Wenn nun diese Wassersäule für sich allein betrachtet wird, so wäre des obersten Querschnitts A Geschw. im Anfang = o, und wächst nur nach und nach an; da aber über A (hier fig. 16.) das Wasser im Gefäß auf die Höhe ML steht, so erhält durch diesen Druck A gleich anfangs eine Geschw. = $2\sqrt{g \cdot ML}$, mit der sich die Fläche A wirklich bewegen müßte, wenn nicht die im Weg stehende Wassersäule AE diese Geschw. verminderte, weil solche, blos durch ihr Gewicht getrieben, nicht so geschwind fortgeht, als die der Höhe ML zugehörige Geschw. fodert. Wenn aber ML überhaupt keine beträchtliche Höhe ist, und etwa nicht über drei Fuse beträgt, wie von den **Polenischen** Versuchen gilt (K. 117) so braucht die Säule AE auch nur um ein paar Fuse gesunken zu sein, um die Geschwindigkeit erlangt zu haben, bei der sie dem Sinken des Wassers im Gefäß, nicht mehr hinderlich fallen kann. Die Zeit aber, in der die Säule AE um 3 Fuse sinkt, ist $= \sqrt{\frac{3}{15,625}} = 0,438$ Sec. also noch nicht eine halbe Sec. Daraus folgt, daß die ganze Zeit, worin die in AE befindliche Wassersäule, dem aus dem Gefäß herabsinkenden Wasser als **hinderlich** angesehen werden kann, noch nicht eine halbe Sec. beträgt, und da selbst während dieser gar geringen Zeit das Sinken des Wassers im Gefäß nicht einmal ganz **gehemmt**, sondern nur seine Geschwindigkeit **vermindert** wird, so fällt in die Augen, daß die Zeit, in der alles Wasser aus dem Gefäß herausfließt,

*) Um mich hier völlig zu beurtheilen, muß noch das, was ich §. 171, 173, 174, 177 und 183 V. beigebracht habe, mit erwogen werden.

fließt, wenn sich anfangs unter A noch die Wassersäule AE befindet, von der Zeit in der es ausfließt, wenn sich in AE keine Wassersäule befände, für die Ausübung nicht merklich verschieden sein kann. Sobald nun des Gefässes Boden von Wasser leer ist, ist auch die Röhre leer, da von den wenigen Tropfen, die allenfalls noch an der Röhrenwand hängen, hier nicht geredet wird.

Nun ist die Zeit, da, wenn die Röhre nicht vorhanden wäre, das Gefäß auf die Tiefe MI = x ausgeleert würde =

$$\frac{m}{n\sqrt{g}} \cdot \sqrt{c} - \sqrt{x}$$

also wird man auch, daferne nicht ML beträchtlich groß ist, bei der Röhre noch die Zeit für dieses Sinken im Gefäß, insofern solches blos von der Schwere des Wassers herrührt, $= \frac{m}{n\sqrt{g}} \cdot \sqrt{c} - \sqrt{x}$ setzen können, wenn gleich auch ausser dem Gefäß die Röhre noch mit angefüllt ist, und nun beides bei E ausfließt.

Mit dem allem besteht die Formel für t (vor §. I.) nicht.

§. 98. (K. §. 171.)

Ist keine Röhre an dem Gefässe ꝛc. Aber aus dem, was ich im Vorhergehenden gesagt habe, folgt überhaupt, daß die Röhre hier, einen kleinen Umstand beiseitgesetzt, überhaupt auf das Sinken des Wassers, insoweit solches von seiner Schwere herrührt, keinen Einfluß hat, daß sie aber aus andern Ursachen das Auslaufen des Wassers doch beträchtlich ändert, wird nicht geläugnet, und vielmehr in der Folge erwiesen.

§ 99. (K. §. 173.)

VIII. für längere Röhren kürzer wird ꝛc. So wie ich die Sache bisher betrachtet habe, kann dieses nicht statt finden, und der hier beigebrachte Beweis ist also wohl nur scheinbar. Es ist nämlich freilich

$$\left((b+o)^{-\frac{1}{2}} - b^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot \tfrac{1}{2}\, db$$

verneint, und es scheinen daher Länge der Röhre und Zeit des Auslaufs entgegengesetzte Differentialien zu haben, daß also die Zeit abnehme, wenn die Länge der Röhre zunimmt; aber es ist folgendes dabei zu erwägen. Es kommt hier eigentlich nichts in Betrachtung, wenn man untersuchen will, wie das Wasser blos vermöge seiner Schwere auslauft, als des Gefässes Höhe und seine Oefnung bei A, wenn nicht die bei E, wegen ihrer Kleinigkeit noch hinderlich fällt (*) daher gar nicht die Formel (K. 169. II.) sondern die (K. 172.) zu gebrauchen wäre. Will man aber den Ausfluß der Röhre bei E annehmen, so muß bemerkt werden, daß es doch nicht auf die Weite der Oefnung E ankommt, sondern auf den Querschnitt des Wasserstrahls in dieser Oefnung. Weil nun des Wassers Geschwindigkeit in E, zu der in A sich verhält, wie $\sqrt{(b + c - y)} : \sqrt{(c - y)}$, wo y die Bedeutung (K. 169. IIII.) hat, so muß der Querschnitt des Wasserstrahls, wie er in E gelangt, zu dem, wie er in A ist, sich umgekehrt verhalten, wie seine Geschwindigkeit d. i. gerade zu wie

$$\sqrt{(c - y)} : \sqrt{(b + c - y)}$$

Und da eigentlich der Oefnung bei A ihre Fläche, oder vielmehr des dadurch gehenden Wassers Querschnitt = n gesetzt ist, und des Gefässes Querschnitt = m, so fällt in die Augen, daß wenn man nun unter n allemal den Querschnitt des Wasserstrahls in der Entfernung b von A versteht, wie es im Buch wirklich zu verstehen ist, nunmehr auch wirklich n nicht mehr eine beständige Grösse sondern eine veränderliche sei, die sich verkehrt wie $\sqrt{(b + c - y)} : \sqrt{(c - y)}$ verhält, wo c unveränderlich bleibe. Man kann also im Ausdruck für t nicht blos b sondern muß zugleich n als veränderlich und als eine Funktion von b ansehen. Und so würde nun das Differential von t (K. 169.) ein ganz anderes als die im Buche.

VIIII. Aber die Formel (K. 169. II.) gilt hier nicht, oder es muß in ihr b = o gesetzt werden, und so hat man, wie schon oft erinnert worden für beide Fälle, sowohl mit als ohne die Röhre, wenn blos die Schwere des Wassers betrachtet wird,

$$t = \frac{m\sqrt{c}}{n\sqrt{g}} \quad (\varphi$$

§. 100.

*) Daß dieses nicht sei, wird hier vorausgesetzt.

§. 100. (K. §. 174. 177.)

Die Ausleerung geschähe also in 4″, 239 ꝛc. Wäre die Röhre nicht vorhanden, so wäre die Zeit der Ausleerung (K. 172.) = 110 · $\sqrt{\frac{1:3}{15,625}}$ oder $lt = l\,110 + \frac{1}{2}l\frac{1}{3} - \frac{1}{2}l\frac{1}{15,625} = l\,110 - \frac{1}{2}l\,3 - \frac{1}{2}l\,15,62$; es ist aber

$\frac{1}{2}l\,3$	= 0,2385606	$l\,110$	= 2,0413927
Add. $\frac{1}{2}l\,15,62$	= 1,5968905 — 1	Abgez.	0,8354511
Summe	= 0,8354511	lt	= 1,2059416

also t = 16 Sec. Wenn man aber auch mit B. die Tiefe der untersten Oefnung = b + c = 16 Zoll setzen will (statt dessen ich nur die Höhe des Cylinders = 4 Zoll annehme) so sehe ich nicht, wie es verstattet ist, den Querschnitt des hervorspringenden Wasserstrahls, der bei A = n ist, noch bei E, = n zu setzen, da solcher bey $E = \frac{\sqrt{(c - y)}}{\sqrt{(b + c - y)}}$ wird, so daß der Strahl, der die Oefnung A ausfüllt, die untere Oefnung der Röhre bei E = A, zumal wenn y schon nicht vielmehr von c verschieden ist, gewiß nicht ausfüllen kann. Ist also die Verhältnis des Querschnitts vom Gefäß, zum Querschnitt des Strahls in der Oefnung A = 110 : 1, so ist es gewiß nicht verstattet, auch die Verhältnis dieses Querschnitts zum Querschn. des Wasserstrahls bei E = 110 : 1 zu setzen, sondern muß weit grösser angesetzt werden, da dann Hrn. B. Ausdruck für die Zeit auch weit grösser als 4,239″, so nämlich wie ich sie angegeben habe, würde herausgekommen sein. Eben hierin suche ich die ganze Unrichtigkeit der Formel (K. 169.) worüber ich mich nun noch einmal zu allem Ueberfluß ganz kurz erklären will. Ich kann es nämlich in Absicht des Wassers zwischen L und M nicht für einerlei halten, ob das Gefäß von MK bis in mk fortgesetzt wäre und nun im Boden km die Oefnung E hätte (hier fig. 16), oder ob das Gefäß bei KM abgeschnitten und statt dessen die Röhre AE mit eben der Oefnung E angesetzt würde, weil ich im letztern Fall nicht annehmen zu können glaube, daß das Wasser beständig geschwind genug durch A zufließt, die ganze Röhre von A bis E auszufüllen, sondern der Strahl nach E zu, immer dünner werden muß, weil seine Geschwindigkeit immer grösser wird, je tiefer er fällt. Da hingegen, wenn das Gefäß bis in mk herabreicht, also das Wasser bis über

mk steht, das Wasser, während es von L bis M sinkt, doch beständig im Ausfluß bei E die ganze Oefnung E ausfüllen muß.

Gleichwohl scheinen die Versuche (K. 177.) die Formel (K. 169.) ziemlich zu bestätigen, wenigstens den Satz, daß mit der Röhre, das Gefäß beträchtlich geschwinder sich ausleert, als ohne sie, da das Gefäß, das nach (Erl. zu K. 172.) ohne die Röhre erst im 16 Sec. leer werden sollte, schon in $6\frac{1}{2}$ Sec. ausgeloffen war.

Ich habe auch schon oft erinnert, daß ich der Wahrheit dieses Satzes im Allgemeinen nicht widerspreche, eben weil sie die Erfahrung ziemlich bestätigt. Nur folgt sie nicht ursprünglich blos aus der Schwere des Wassers und kann nicht durch die Formel (K. 169.) bewiesen werden, die sich blos auf die Schwere oder den Druck des Wassers gründet. Es muß noch was ganz anders ausser dem bloßen Druck des Wassers hinzukommen, das die dortige Formel gar nicht angiebt. Indem man nämlich der mit Wasser angefüllten Röhre untere Oefnung bei E öfnet, schießt das Wasser mit einer Geschwindigkeit heraus, mit der das durch A nicht nachfolgen kann. Ohne die Atmosphäre würde also zwischen A und der Oberfläche des in der Röhre befindlichen Wassers wirklich eine Leere entstehen, die aber nun, so wie sie entstehen will, sogleich durch den Druck der Atmosphäre wieder mit Wasser aus dem Gefäß angefüllt wird, so, daß aus diesem Grund die Formel (K. 169.) wirklich zu gebrauchen ist, wie ich umständlicher unten (Erl. zu K. 183. V.) gewiesen habe. Nur muß man bemerken, daß man für n nicht die Weite der untern Oefnung bei E, sondern des zusammengezogenen Wasserstrahls Querschnitt also eigentlich $1,41 \cdot n$ statt n nehme (K. 142.). Hiernach gäbe sich im Ex. (K. 174.)

der Versuch gab

$t = 1,41 \cdot 4,239 = 5,977$ Sec. . . . 6,50

(K. 175)

$t = 1,41 \cdot 2,712 = 3,824$ . . . 4,33

wo die Rechnung ziemlich mit den Versuchen übereinstimmt. Der dritte Versuch (K. 176.) gehört hierher nicht, weil da nach der Formel (K. 171.) gerechnet werden muß. Auch fällt bei ihm die Betrachtung der Luftleere weg. Wenn die Röhre conisch und n weiter als die Oefnung bei A ist, so hat die Wassersäule AE mehr beschleunigende Kraft, als wenn n nicht $>$ A oder gar n $<$ A ist. Diese für die ganze bisherige Lehre überaus wichtige Bemerkung ergiebt sich

sich aus Hydrost. §. 24. verbunden mit höh. Mech. §. 49. S. 30. Es ist nämlich der Druck der Wassersäule AE auf die Fläche $n = b \cdot n$ (Hydrost. a. a. O.) wo ich des Wassers spec. Schwere $= 1$ setze. Die zwischen A und E befindliche Masse von Wasser aber ist, dafern die Oefnung $A < n$ ist, $< b \cdot n$, daher ich sie $= b \cdot n - z$ setzen will; und nun ist die **beschleunigende Kraft** für diese Wassersäule (höh. Mech. a. a. O.) =

$$\frac{b \cdot n}{b \cdot n - z} \cdot g \text{ gewiß} > g ,$$

Umgekehrt wird für $n < A$ die Wassermasse zwischen E und $A > b\,n$ also $= b\,n + z$, der Druck aber bleibt $b \cdot n$, und daher die beschleunigende Kraft =

$$\frac{b \cdot n}{b \cdot n + z} \cdot g \text{ gewiß} < g$$

Hieraus folgt: wenn die Masse Wasser $b\,n \pm z$, die ich A heisen will, einmal bestimmt ist, so wird sich die Zeit, in der einerlei Menge Wasser herauslauft, umgekehrt wie $\frac{b \cdot n}{A} \cdot g$ d. i. umgekehrt wie die Weite der untern Oefnung n; oder die Wassermenge, die in einerlei Zeit, aus einerlei Gefäß, bei einerlei Tiefe, durch gleich lange Röhren herauslauft, wird sich gerade zu wie die Weite der Oefnung verhalten. Man sieht leicht, daß dieses allgemein ist, die Gestalt des Gefäßes sei wie sie wolle. Uebrigens werden hier nur Oefnungen, die gegen des Gefäßes Weite sehr gering sind, vorausgesetzt und daß übrigens die verschiedene Weite dieser sehr kleinen Oefnungen die Geschwindigkeit des herauslaufenden Wassers nicht ändere. In wiefern dieses sich annehmen läßt, und wie überhaupt Grösse der **Oefnung** und Grösse der **Geschwindigkeit** des herauslaufenden Wassers zusammenhängen, wird unten in dem lehrreichen 3ten Abschn. nach einer von Hrn. **Bernoulli** zuerst aufgestellten Theorie näher untersucht. Wirklich ist der nur erwähnte Satz, daß sich die ausfliesende Wassermenge wie die Weite der Oefnung bei E verhält, hier, wo sehr kleine n vorausgesetzt werden, der **Bernoullischen** Theorie völlig gemäß. Aber der Druck der Atmosphäre muß dabei mit betrachtet werden. Es muß nämlich der Druck des im Gefäß befindlichen Wassers, mit dem Druck der Atmosphäre zusammengenommen groß genug sein, den zwischen A und E entstehenden Platz, sogleich wieder auszufüllen oder eigentlich die Entstehung der Leere zu verhindern (s. unten K. 183. V.)

Ueber-

Ueberhaupt sieht man wohl, daß bei dergleichen Untersuchungen, wo sich Röhren am Gefäß befinden, zwischen Theorie und Erfahrung eben nicht die genaueste Uebereinstimmung erwartet werden dürfe. Das zeigen auch Mariottes Versuche (K. 179.) die wieder von den Bernoullischen beträchtlich abweichen; aber bei B. war auch b + c lange nicht so groß als bei M. und der Widerstand der Luft gegen den hervorspringenden Strahl, hatte daher auch weniger Einfluß. Die Luft macht hierbei eine ziemlich beträchtliche Hindernis aus, welches auch durch den Mariottschen Versuch (K 183. I.) bestätigt wird. Und in dieser Rücksicht fehlen uns wohl immer noch zuverläßige theils wirklich in der Luft selbst, theils im luftleeren Raum angestellte Versuche. Man stelle den Versuch bei dem Gefäß mit der Röhre AE so an, daß man zuvor die Röhre gleich unterhalb A ritzt oder mit kleinen Löchern versieht, so wird dieser Versuch sogleich das, was ich von dem Druck der Atmosphäre wegen der unter A entstehenden Luftleere gesagt habe, in ein helleres Licht setzen. Oder man setze das Gefäß mit der Röhre, ohne solche unter A zu durchlöchern, in einen luftleeren Raum. Das Wasser wird beim Auslaufen die Röhrenöfnung bei E nicht ausfüllen.

In der Ausübung wo man häufig, z. B. bei Berechnung über Wasserräder, die Geschw. des aus Röhren kommenden Wassers zu wissen nöthig hat, verfährt man am sichersten so: man mißt so genau als möglich den Querschnitt n des aus der Röhre hervordringenden Wassers, und läßt solches eine kleine Zeit t über, die man gleichfalls genau abmißt, in ein prismatisches Behälter fliesen, da man dessen cubischen Inhalt hernach genau berechnet; dieser soll k^3 heisen, so hat man, wenn M die in einer Sec. hervorströhmende Wassermenge bedeutet

$$1.) \quad M = \frac{k^3}{t}$$

und die Geschwindigkeit des Wassers in der Oefnung

$$= \frac{M}{n} = \frac{k^3}{nt}$$

und nun rechnet man nicht etwa das wirklich vorhandene Gefälle, sondern setzt

2.) Das

2.) das Gefälle = der zur Geschwindigkeit $\frac{k^3 : t}{n}$ gehörigen Höhe

$$= \frac{\left(\frac{k^3 : t}{n}\right)^2}{\frac{4g}{M^2}} \quad \text{(K. 166.)}$$

$$= \frac{M^2}{4 g n^2}$$

und nun kann man nach diesen beiden Formeln 1 und 2. auch bei den größten Röhrenleitungen sicher weiter rechnen, ohne sich um alle die bisher erwähnten Schwierigkeiten sehr zu bekümmern.

§. 101. (K. §. 179.)

Was sich **Mariotte** von der Wirkung der Röhre beim Auslaufen des Wassers aus dem Gefäß gedacht hat, daß nämlich das Wasser in der Röhre durch das im Gefäß etwas zurückgehalten und dagegen das im Gefäß durch das in der Röhre etwas schneller nachgezogen werde, hat viele Aehnlichkeit mit des Hrn. Prof. **Hollmanns** Gedanken über die Ursache vom Fließen des Hebers, der solche gleichfalls in dem Zusammenhang der Wassertheilgen sucht, und sich sogar durch die Luftpumpe überzeugen zu können glaubt, daß der Druck der Atmosphäre die Ursache davon, nicht sein könne. Einen herrlichen Kommentar zu diesem **Hollmannischen** Einfall findet man in der **Vorrede zu Hrn. Hofr. B. Anmerk. über die Markscheidekunst.** Jeder wird aber auch gar bald begreifen, daß es mit dem Ausfließen des Hebers eine ganz andere Bewandnis habe, als mit dem Ausfließen des hier erwähnten Gefässes, und daß der Gebrauch der Luftpumpe bei letzterem wohl zur Erläuterung nützlich sein könnte, da er gegentheils bei dem Heber nicht anders als lächerlich sein konnte, und kaum werth ware, daß ihn ein **Kästner** rügte.

§. 102. (K. §. 180.)

Es ist $x - e = \left(\frac{(T - t) - 1}{T}\right)^2 \cdot c$

$$= \left(\left(\frac{T - t}{T}\right)^2 - \left(\frac{2 (T - t) - 1}{T^2}\right)\right) \cdot \bullet$$

Also

$$e = x - \left(\frac{T - t}{T}\right)^2 \cdot c + \left(\frac{2\,(T - t) - 1}{T^2}\right) \cdot c$$

Aber $x - \left(\frac{T - t}{T}\right)^2 \cdot c = 0$, also hat man

$$e = \left(\frac{2 \cdot (T - t) - 1}{T^2}\right) \cdot c$$

Daher im Buch — 1 statt + 1 geschrieben werden muß, und das beigebrachte Ex. ist also richtig berechnet.

§. 103. (K. §. 182.)

III. Bei (K. 173. VIII.) habe ich einen dort eingeschlichenen Schreibfehler bemerkt. Es wäre möglich, daß der Hr. Hofr. da er die Stelle hier schrieb, nicht auf (169.) selbst, sondern auf (173. VIII.) gesehen hätte, weil er da die Verhältnis beider Zeiten angegeben hatte, denn der dortige Schreibfehler giebt wirklich die Verhältnis beider Zeiten für E und B wie $(\sqrt{(b + c)} - \sqrt{c}) : \sqrt{c} = (\sqrt{(3 + 1)} - \sqrt{1}) : \sqrt{1} = (2 - 1) : 1$ oder für B und E = 1 : (2 — 1). Aber die richtige Verhältnis nach Verbesserung des Schreibfehlers ist.

$$\begin{aligned} &(\sqrt{(b + c)} - \sqrt{b}) : \sqrt{c} \\ = \;&(\sqrt{(3 + 1)} - \sqrt{3}) : \sqrt{1} \\ = \;&(2 - \sqrt{3}) : 1 = 268 : 1000 \end{aligned}$$

oder für B und E = 1000 : 268.

Offenbar aber soll es hier in der vierten Zeile von unten nicht c = 1, sondern c = 4 heisen, weil ausdrücklich erinnert wird, es solle das Gefäß E mit seiner Röhre die Höhe von B haben, daß also die Höhe von B = 1 + 3 = 4 sein muß. Und das gäbe die Verhältnis der Ausleerungszeiten für B und E

$$\begin{aligned} &= \sqrt{4} : (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \\ &= 2 : (2 - 1{,}732) = 2 : 0{,}268 \end{aligned}$$

Und weil auch dieses das noch nicht sein kann, was hier eigentlich gesagt werden soll, da Gravesand doch nur eine kleine Abweichung der Verhältnis 1 : 1 von der Ausübung wahrgenommen hat, so müssen einige Schreibfehler hier

hier eingeschlichen sein und verbessert werden. Ich will daher den ganzen Satz III. wie er wohl heisen müßte, hersetzen.

Ein Gefäß E (hier fig. 17.) so weit als A und B, hat im Boden eine Röhre so hoch als A, mit der es die Höhe von B erreicht, die Röhre, welche also $\frac{1}{7}$ so lang sein muß, als das Gefäß hoch ist, ist durchaus so weit, als die Oefnungen in A und B, im Durchmesser $\frac{1}{7}$ Zoll. Hier braucht man 169. für E, 172 für A, und es ist in 172. c = 1, in 169. c = 3, b = 1, $\frac{m}{n}$ für beide Gefässe einerlei, also verhalten sich die Zeiten der Ausleerungen von A und E wie

$$\sqrt{1} : (\sqrt{(1+3)} - \sqrt{1}) = 1 : (2 - 1) = 1 : 1$$

IIII. Statt B. muß man hier, soviel ich einsehe, wieder A lesen, wie sich aus der Korrektion III. ergiebt. Ich habe aber diese Verbesserungen aus dem Verzeichnis der Druckfehler weggelassen.

V. *als wenn beide gleich weit wären* ꝛc. das alles stimmt mit dem, was ich von dem Auslaufen des Wassers durch eine Röhre gesagt habe, sehr wohl überein. Die **Gravesandsche** Erklärung dieser Begebenheit durch den **Zusammenhang der Wassertheilgen**, ist übrigens der **Mariott**schen (179. am Ende.) sehr ähnlich, und ich verweise daher hier gleichfalls auf die dort erwähnte **Kästnerische** Vorrede.

§. 104. (K. §. 183.)

I. *Auser der Abweichung* 182 V. ꝛc. Aber nach denen Begriffen, die ich mir von dem Ausfliesen durch die Röhre mache ist dieses eigentlich keine Abweichung, sondern ein Umstand, der sich gar wohl erwarten läßt.

III. *so entstand keine Höhlung* ꝛc. Aber in der Art, diese Begebenheit zu erklären, mag sich doch wohl **Belidor** geirrt haben. Man muß, wie ich die Sache einsehe, die Erklärung gerad umkehren. So lange noch kein Bret über die Höhle a (fig 18.) gelegt wird, ist der Druck der Atmosphare auf die Oberfläche IL überall gleich stark, und ändert daher auf ihr nichts. Sobald aber das Bret $\alpha\beta$ auf den Spiegel IL der Oefnung A gegenüber, gelegt wird, kann nun eben wegen des ietzt sich äusernden Drucks der Atmosphäre keine Höhle entstehen. Wollte nämlich das Wasser über A eine Höhle zu bilden anfangen, so entstünde in dieser Höhle zugleich ein leerer Raum, der

ringsum vom Wasser und oben vom Bret eingeschlossen wäre, und da bekanntlich gleich beim ersten Entstehen dieser Höhle, der äusere Druck der Luft auf die Wasserfläche IL, das umstehende Wasser in diese Höhle hineindrückt, so wird eben dadurch das Entstehen einer solchen Höhle völlig verhindert. Indem nun das Wasser durch den äusern Druck der Luft, wenn das Bret aufliegt, ohnunterbrochen genöthiget wird, die sonst ohne das Bret entstehende Höhle auszufüllen, und sich solchergestallt durch diesen kleinen Raum auszubreiten, wird das Wasser durch dieses Ausbreiten nothwendig um etwas zu sinken genöthigt, warum es nicht sinken würde, wenn das Bret weggeblieben wäre. So dient also dieses Bret, oder eigentlich die Atmosphäre vermittelst dieses Brets, das Auslaufen aus einem Gefäß alsdann zu beschleunigen, wann ohne das Bret sich die Höhle zu zeigen angefangen hätte, wie sich auch so begreifen läßt: ohne das Bret wäre die auf A druckende Wassersäule nur noch etwas höher als Aa, mit dem Bret aber bliebe sie beständig MB, so hoch nämlich der Wasserspiegel über der Oefnung A läge, daher diese Beschleunigung sehr beträchtlich werden kann, so daß, wenn BK ein beträchtlich großer Behälter von geringer Höhe BM ist, der in A eine Oefnung von etlichen Zollen im Durchmesser hat, das sämmtliche Wasser alsdann bei einem kleinen aufgelegten Bret $\alpha\beta$ bei weiten eher, als ohne dieses Bret aus dem Behälter laufen muß.

V. Aber diese hier für sich ganz richtige Bemerkung sagt eben, was ich schon oft erinnert habe, daß es für das Auslaufen des Wassers, insofern solches nur von seinem eigenen Druck getrieben wird, gar nicht gleichgültig ist, wie groß man die Oefnung bei A macht, und bestätigt, was ich gegen die Formel (169) erinnert habe. Es kommt aber, wie ich gleichfalls schon bemerkt habe, ausser des im Gefäß befindlichen Wassers eigenem Druck, noch der Druck der über IB stehenden Luftsäule in Betrachtung. Wäre nämlich des Wassers eigener Druck nicht vermögend, die Röhre höher als bei R beständig voll zu erhalten, so müßte auf solche Art zwischen A und R eine Luftleere entstehen und die erwähnte Luftsäule würde also nun mit voller Macht das im Gefäß befindliche Wasser zur Oefnung A hineinzutreiben bemüht sein. Es wäre so gut, als ob nun über IB das Wasser im Gefäß noch um 32 Fus höher stünde, und man müßte also, um zu sehen, ob das Wasser im Gefäß die ganze Röhre bis an A voll zu halten vermögte, die Rechnung so führen, als wäre die Höhe des Wassers im Gefäß in Fusen $= CA + 32$.

Die Röhre sei anfangs bei G verschlossen und also von C bis G mit Wasser angefüllt; indem man nun G eröfnet, springt das Wasser mit einer Geschwindigkeit $= 2\sqrt{g \cdot CD}$ aus G hervor; in dem nämlichen Augenblick aber,

aber, verurſacht der Druck des im Gefäß befindlichen Waſſers, daß ſolches nur mit der Geſchwindigkeit $2\sqrt{g \cdot CA}$ zu A hineinfährt, und wenn nun

$$\pi r^2 \cdot 2\sqrt{g \cdot CA} < \pi R^2 \cdot 2\sqrt{g \cdot CD}$$

d. i. $$r^2\sqrt{CA} < R^2\sqrt{CD}$$

wäre, ſo müßte ſogleich die Waſſerſäule in der Röhre ſich von A zu entfernen und ſo zwiſchen deren Oberfläche und der Oefnung eine **Leere** zu entſtehen **anfangen**. Aber wie dieſe Leere zu entſtehen anfängt, in eben dem Augenblick wird nun das Waſſer im Gefäß von einer Waſſerſäule, deren Höhe CA + 32 Fuſe iſt, nachgedruckt, und das Waſſer folgt alſo der ſinkenden Waſſerſäule DA durch die Oefnung A mit einer Geſchwindigkeit

$$= 2\sqrt{(CA + 32)}$$

Gegentheils druckt die Luft über G dem Waſſerſtrahl entgegen in ebendem Augenblick, ſo ſtark, als eine Waſſerſäule von der Höhe = 32 F. und die Geſchwindigkeit womit in dem Augenblick der Strahl zur Oefnung herausfährt, iſt demnach

$$2(\sqrt{g \cdot CD} - \sqrt{g \cdot 32})$$

Und wenn alſo zwiſchen dem in der Röhre befindlichen Waſſer und der Oefnung A eine Leere bleiben oder entſtehen ſoll, ſo muß

$$\pi r^2 \cdot 2\sqrt{g} \cdot (CA + 32) < \pi R^2 \cdot 2\sqrt{g} \cdot (\sqrt{CD} - \sqrt{32})$$

oder

$$r^2\sqrt{(CA + 32)} < R^2(\sqrt{CD} - \sqrt{32})$$

ſein. Nun iſt die Gröſſe zur Linken allemal beiaht und > 0, die aber zur Rechten nie > 0 ſolange CD < 32 Fus iſt, alſo erhellet hieraus, daß keine Leere in der Röhre möglich iſt, ſo lange CD weniger als 32 Fus beträgt. **Ohne den Druck der Luft** würde dieſe Leere entſtehen, alſo das Waſſer in der Röhre etwa nur bis bei R ſtehen, wie ſich leicht genau berechnen läßt, und die Geſchwindigkeit des Waſſers durch G würde nicht mehr der Höhe CD ſondern der RD zugehören, und die Zeit der Ausleerung müßte offenbar völlig nach (K. 171; 172;) berechnet werden. Aber wegen des Drucks der Luft kann dieſe Leere aus den eben erwähnten Gründen gar nicht entſtehen, ſo lange CD $<$ 32 Fuſe iſt (und auch nicht einmal für CD $>$ 32 F. wenn nicht $r^2\sqrt{(CA + 32)} < R^2 \cdot (\sqrt{CD} - \sqrt{32})$ iſt). Solange demnach CD $<$ 32 F. iſt, bleibt der Raum von C bis E mit Waſſer angefüllt; der Einfluß vom Druck iſt ſolchergeſtallt, weil keine Leere wirklich da iſt, ſo gut als

gar nicht verhanden, und das Wasser muß bei G also wirklich mit der Geschwindigkeit hervorspringen, die ihm eine Wassersäule von der Höhe CD zu geben vermag. d. i. **Blos wegen des Drucks der Luft, läßt sich die Formel (K. 69) beim Auslaufen durch die Röhre, wirklich gebrauchen allemal** für CD $<$ 32 F. und überdas in denen Fällen für CD $>$ 32 F. wo $r^2 \cdot \sqrt{(CA + 32)}$ nicht $< R^2 (\sqrt{CD} - \sqrt{32})$ also $\frac{r^2}{R^2}$ nicht $< \frac{\sqrt{CD} - \sqrt{32}}{\sqrt{(CA + 32)}}$ ist.

Ist es also Wunder, daß auf alle die angestellten Versuche die Formel (K. 169.) wirklich so von ohngefähr gepaßt hat? Wollte man hierüber weitere Versuche anstellen, so könnte man solches bequemer mit Queckſilber verrichten; statt der Zahl 32 müßte man dann 28 setzen, und nun alles in Zollen ausdrucken, wie zuvor beim Wasser alles auf Fuse gieng.

nicht ganz voll bleiben ꝛc. unter denen Umständen nämlich, die ich eben angegeben habe, weil man sich dabei an die entstehende Leere zwischen A und R erinnern muß, an die Bel. gar nicht gedacht hat.

Daraus leitet Belidor ꝛc. Aber, wie aus dem Erwähnten erhellet, ganz irrig. **Mariottes** Versuche (s. unten im Buch S. 174.) daß überhaupt nie die Höhe des springenden Strahls der Höhe des fallenden gleichkommt, und daß dieser Unterschied desto beträchtlicher wird, ie höher das Gefälle ist. Aber davon lassen sich ganz andere und sehr vielerlei Ursachen angeben.

§. 105. (K. §. 185.)

IIII. **Zu Wasserruhren zu gebrauchen** ꝛc. Ich habe diese Untersuchung oben (K. 103.) ohne Anal. d. Unendl. vorgetragen. Sie stimmt mit der hier völlig überein, nur daß hier $\frac{a}{h}$ x statt x ist gesetzt worden, weil wegen der Abweichung der Ausübung von der Theorie die Höhe, welche der Geschw. des bei E herausfahrenden Wassers nach den Gesetzen fallender Körper zugehört, nicht mit der wirklichen Wasserhöhe x über E einerlei ist, sondern $= \frac{a}{h}$ x gesetzt werden muß, da dann die Werthe von a, h. erst aus Versuchen hergeleitet werden müssen. So führt z. B. H. Hofr. **Karsten** (Hydraul. 23. §.) aus **Gravesands** Elem. phys. einen Versuch an, wo die der Geschw. des horizontal ausfliesenden Wassers nach den Gesetzen fallender Körper $= 16\frac{1}{2}$ Zoll, die

die wirkliche Wasserhöhe aber = 18 Z. war; also wäre da $\frac{a}{h} = \frac{18}{16\frac{1}{2}} = \frac{36}{33} = \frac{12}{11}$, aber für größere Wasserhöhen würde vermuthlich auch $\frac{a}{h}$ gröſſer werden, oder die Theorie von der Erfahrung immer mehr abweichen, je gröſſer a bei der Erfahrung ist. Und so würde also $\frac{h}{a}$ selbst eine Funktion von x sein, die man durch Erfahrungen bestimmen müßte. Das würde dann auch die Integration der Differentialgleichung in II. schwieriger machen und einen andern Werth von t geben. Weil aber völlig genaue Uebereinstimmungen der Theorie mit der Erfahrung hier doch nicht zu erwarten sind, so sieht man $\frac{a}{h}$ als eine durch Erfahrungen bestimmte unveränderliche Gröſſe an, und ist zufrieden, wenn die durch solche Voraussetzung sehr leicht zu findende Integralgleichung in (II.) der Wahrheit nur nahe kommt. Für eine geringe Höhe, wie die EL (Erl. zu 103.) = 11 Zoll 0,23 Lin. kann man $\frac{a}{h} = \frac{12}{11}$ beibehalten, und so giebt sich aus der angef. Erl. weil der Werth von $\frac{a}{h}$ doch immer die Sache noch ungewiß läßt, und am Ende erst noch durch Probiren geholfen werden muß, für die krumme Linie EQC ziemlich richtig

$$y = 12\sqrt[4]{\frac{12 \cdot x}{11}}$$

$$\text{oder } ly = l\,12 + \frac{l\,12 - l\,11}{4} + \frac{lx}{4}$$

Es ist aber $l\,12 = 1{,}0791812$

Abgez. $l\,11 = 1{,}0413927$

Differ. $= 0{,}0377885$

Divid. mit 4) $= 0{,}0094471$

Add. $l\,12 = 1{,}0791812$

Summe $= 1{,}0886283$

also $ly = 1{,}0886283 + \frac{lx}{4}$

Und

Und nun erhält man in Linien

Für $x =$	1	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
$\log y =$	1,0886283	1,1638858	1,2079886	1,2391433	1,2633708	1,2831661	1,2999028	1,3144008	1,3271889	1,3386283	1,3489765	1,3584236
also $y =$	12,26	14,58	16,14	17,34	18,33	18,98	19,95	20,62	21,24	21,81	22,38	22,82

So

So kann man also den Anfang EC dieser krummen Linie bis zu EB = 12 Lin. oder 1 Z. leicht verzeichnen (hier fig. 19.) wenn man von E nach B 1, 2, 3 u. s. w. Linien abmißt, und dann die zu iedem x gehörige Ordinate y, wie sie diese Tafel giebt, zieht; die krumme Linie durch die Endpunkte dieser 12 Ordinaten, giebt EQC für das 1 Zoll lange Stück der Axe EB.

Für x = 11 Zoll = 132 Lin. wird
ly = 1,6187717
also y = 41,57 Lin. = 3 Z. 5,57 Lin.

welches der Rechnung (Erl. zu K. 103.) völlig gemäß ist; es ist nämlich dort des Gefäßes Halbmesser in der Höhe von 11 Zoll 0,23 Lin. über E = 3 Z. 4,62 Lin. angegeben, also das hier zuletzt gefundene y um sehr wenig grösser, der Unterschied rührt aber nicht etwa von den 0,23 Lin. welche keine merkliche Aenderung im Werthe von y machen, sondern daher, daß hier $\sqrt[4]{\frac{12 \cdot x}{11}}$ statt des dortigen $\sqrt[4]{x}$ gebraucht worden ist. Die Gestalt der krummen Linie ergiebt sich solchergestalt etwa wie fig. 19. ausweist.

§. 106. (K. §. 186.)

IIII. werden hier nicht betrachtet ꝛc. und das mit Recht weil hier vom Kleinen auf das Grosse geschlossen werden soll, und daher auch nichts beim Kleinen betrachtet werden darf, was es im Grossen verliehrt.

§. 107. (K. §. 187.)

Ich muß hier noch einer Aufgabe gedenken, die in der Ausübung vorkommen könnte. Es kann sich nämlich der Fall ereignen, daß man berechnet hat, wieviel Wasser man zu einem gewissen Gebrauch aus einem Behälter, das durch ein Schutzbrett verschlossen und eröfnet wird, von Secunde zu Secunde nöthig hat, wie sich weiter unten bei Betrachtung der Wasserräder näher ergeben wird. Und nun kann man fragen: **wie hoch muß man das Schutzbret ziehen, um die begehrte Wassermenge zu erhalten?** vorausgesetzt, daß die Wasserhöhe im Behälter sich nicht merklich ändert.

Aufl. Die für iede Sec. begehrte Wassermenge heise M, die Breite des Schutzbretes b, die gesammte Wasserhöhe vom Wasserspiegel bis zur Schutzbretschwelle η, daß also c = η — a ist; so hat man in der Formel t = 1 und η — a statt c gesetzt,

$$M = \sqrt{\left(\frac{hg}{a}\right)} \cdot \tfrac{4}{3}\, b \cdot \left(\eta^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)$$

also $$M^2 = \frac{hg}{a} \cdot \tfrac{16}{9} \cdot b^2 \cdot (\eta^3 + a^3 - 2\sqrt{a^3\,\eta^3})$$

oder μa statt h gesetzt,

$$M^2 = \mu g b^2 \cdot \tfrac{16}{9} \cdot (\eta^3 + a^3 - 2\sqrt{a^3\,\eta^3})$$

oder

$$\frac{9\,M^2}{16\,\mu g b^2} - \eta^3 - a^3 = -2\sqrt{a^3\,\eta^3}$$

und aufs neue quadrirt, giebt

$$\left(\frac{9\,M^2}{16 \cdot \mu g b^2} - \eta^3\right)^2 - \left(\frac{9\,M^2}{8 \cdot \mu g b^2} - 2\eta^3\right) \cdot a^3 + a^6 = 4a^3\eta^3$$

oder

$$a^6 - \left(\frac{9\,M^2}{8\,\mu g b^2} + 2\eta^3\right) \cdot a^3 + \left(\frac{9\,M^2}{16\,\mu g b^2} - \eta^3\right)^2 = 0$$

das sich kurz so ausdrucken läßt

$$a^6 - 2(A + 2\eta^3) \cdot a^3 + A^2 = 0$$

da dann $A = \frac{9\,M^2}{16\,\mu\,g\,b^2} - \eta^3$ ist. Man hat also, u zu finden, eine Gleichung vom 6ten Grade aufzulösen nöthig.

Ex. Es sei b = 6 Fus, η = 3 F, M = 50 C. Fus, $\mu = \frac{1}{6}$, so wird

$$A = \frac{9 \cdot 2500}{\frac{1}{6} \cdot 16 \cdot 15{,}625 \cdot 36} - 27 = 3 - 27 = -24$$

und $A^2 = 576$, also

$$a^6 - 2\,(54 - 24) \cdot a^3 + 576 = 0.$$

oder $$a^6 - 60 \cdot a^3 + 576 = 0; \quad (\text{☿}$$

Weil nun aus dem Werth von b und M ohngefähr auf den von a geschlossen werden kann, so sieht man gar bald, daß a um $2\frac{1}{2}$ Fus herum betragen müsse, und durch Näherung findet man schon ziemlich genau a = 2,4 F. Es ist näm-

nämlich $l\,2{,}4^6 = 2{,}281266$, also $2{,}4^6 = 191{,}1$;
und $l\,2{,}4^3 = 1{,}140633$ also $2{,}4^3 = 13{,}82$
und $60 \cdot 2{,}4^3 = 829{,}2$; aber
$2{,}4^6 + 576 = 191{,}1 + 576 = 767{,}1$

Man nehme $a = 2{,}3$; so wird
$l\,2{,}3^6 = 2{,}1703668$ also $2{,}3^6 = 148$
$l\,2{,}3^3 = 1{,}085\,18\ldots$ also $2{,}3^3 = 12{,}17$
und $60 \cdot 2{,}3^3 = 730{,}2$;
aber $2{,}3^6 + 576 = 148 + 576 = 724$

welches der 730,2 schon sehr nahe kommt, und weil eine sehr kleine Aenderung im Werth von a bei der Potenz a^6 schon sehr beträchtlich wird, so sieht man zum voraus, daß man den gesuchten Werth von a so genau hat, als man ihn für die Ausübung verlangen kann. Zum Ueberfluß setze man noch $a = 2{,}29$ so wird

$l\,2{,}29^6 = 2{,}159013$ also $2{,}29^6 = 144{,}3$;
$l\,2{,}29^3 = 1{,}0795065$ also $2{,}29^3 = 12{,}01$;
und $60 \cdot 2{,}29^3 = 720{,}6$
aber $2{,}29^6 + 576 = 144{,}3 + 576 = 720{,}3$.

Diese Zahl kommt der 720,6 so nahe, oder der Werth 2,29 von a, bringt die Formel (♃) so nahe auf 0, daß man den wahren Werth von a wenigstens bis in Tausendtheilen eines Fußes richtig hat, also gewiß genauer, als er sich in der Ausübung abmessen läßt. Man müßte demnach das Schutzbret so hoch aufziehen, daß sein unterer Rand um die Höhe $\eta - a = 3 - 2{,}29 = 0{,}71$ Fus also $8\frac{1}{2}$ Zoll über der Schutzbretsschwelle läge. Und so sieht man, daß sich in andern dergleichen Fällen diese Höhe $\eta - a$ aus der Gleichung vom 6ten Grad allemal ohne sonderliche Schwierigkeit angeben läßt.

§. 108. (K. §. 189.)

s. oben K. §. 103. Man sieht hieraus zugleich, daß der Werth von h auf die Bestimmung der Stelle des Mittelpunkts der Geschwindigkeit keinen Einfluß hat, und daß solche immer die nämliche bleibt, h mag was man will für einen Werth haben, wenn nur der Satz wahr bleibt, daß sich die Geschw. allemal wie die Quadratwurzel aus der Höhe verhält. Wenn indessen gleich

die Stelle immer dieselbige bleibt, h mag so groß seyn als man will, so hängt doch die Geschwindigkeit an dieser Stelle von h ab, so daß die der mittlern Geschw. zugehörige Höhe nicht wirklich c sondern $= \frac{h}{a}$ c ist. Vielleicht wäre es für die Deutlichkeit zuträglicher gewesen, im Buch entweder die Höhe EH nicht mit a zu bezeichnen, oder wenn man das hätte thun wollen, dann lieber statt des bisher gebrauchten beständigen Quotienten $\frac{h}{a}$ einen einzelnen Buchstaben μ zu setzen. Hat man z. B. gefunden, daß sich $\frac{h}{a} = \frac{9}{11}$ setzen läßt, und man will nun iedesmal zugleich die Höhe EH mit a bezeichnen, so geht solches zwar an, aber man sieht leicht, daß man dann allemal erst h so annehmen müsse, daß noch $\frac{h}{a} = \frac{9}{11}$ bleibe d. i. man muß alsdann $\frac{h}{EH} = \frac{9}{11}$ also $h = \frac{9}{11} \cdot EH$ setzen, welches beim Gebrauch dieser Rechnungen, wohl zu bemerken ist. Diese Bemerkung nebst noch einer (K. 192.) wäre nicht nöthig gewesen, wenn man sich blos des Buchstabens μ auf die erwähnte Art bedient hätte.

§. 109. (K. §. 190.)

Substituirt man nämlich den Werth von e aus (K. 188.) so ist $\sqrt{(a + e)} =$

$$\sqrt{\left(a + \frac{\frac{4}{9}\left((a + c)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)^2}{c^2} - a\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4}{9}\left(\frac{(a + c)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}}{c}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{2}{3}\left((a + c)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right) : c$$

also im Buch ein Druckfehler zu korrigiren.

§. 110.

§. 110. (K. §. 192.)

Für a oder EH = o, wird (Erl. zu K. 189.) $h = \mu \cdot EH = \mu \cdot o$ also freilich auch = o, und $\frac{h}{a} = \frac{o}{o}$ aber wegen dieses Quotienten $\frac{h}{a} = \frac{o}{o}$ s. die Erl. d. An. endl. Gr. S. 155. wo erinnert wird, daß $\frac{o}{o}$ allemal für sich ein unbestimmter Ausdruck ist, dessen Werth aus andern Umständen beurtheilt werden muß.

§. 111. (K. §. 196.)

Man hat hier $\frac{CQ}{k} = \int x \sqrt{(a + x)} \cdot dx$. Nun ist nach (An. d. Un. 248.) das Integral von $x^{rn} \cdot x^{n-1} \cdot (a + b x^n)^p \cdot dx$ (248. IIII.) die Const. so bestimmt, daß das Integral für x = o verschwindet, wie man auch für den gegenwärtigen Fall annehmen muß, =

$$\frac{z^{p+1} \cdot \left(\frac{z^r}{p+r+1} - \frac{r a z^{r-1}}{p+r} \cdot \cdot \pm \frac{a^r}{p+1}\right) \mp a^{p+r+1} \cdot \left(\frac{1}{p+r+1} \cdot \cdot \pm \frac{1}{p+1}\right)}{n b^{r+1}}$$

(a. a. O. VIIII. XI. u. XII.). Substituirt man also hier so, wie es im Buch angegeben ist, so hat man hier $\int x \sqrt{(a + x)} \cdot dx =$

$$\frac{z^{\frac{3}{2}+1} \cdot \left(\frac{z}{\frac{3}{2}+1+1} - \frac{a}{\frac{3}{2}+1}\right) - a^{\frac{3}{2}+1} \cdot \left(\frac{1}{\frac{3}{2}+1+1} - \frac{1}{\frac{3}{2}+1}\right)}{1 \cdot 1^{1+1}}$$

$$= z^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{z}{5:2} - \frac{a}{3:2}\right) - a^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{1}{5:2} - \frac{1}{3:2}\right)$$

$$= \frac{2 \cdot z^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2a \, z^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2 a^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2 a^{\frac{5}{2}}}{3}$$

$$= \frac{6 \cdot z^{\frac{5}{2}} - 10 \cdot a z^{\frac{3}{2}} - 6 \cdot a^{\frac{5}{2}} + 10 \cdot a^{\frac{5}{2}}}{15}$$

$$= \frac{6 \cdot z^{\frac{5}{2}} - 10 \cdot a z^{\frac{3}{2}} + 4 \cdot a^{\frac{5}{2}}}{15}$$

und nun a + x ſtatt z geſetzt, gieb $\int x \sqrt{(a+x)} \cdot dx =$

$$\frac{6 \cdot (a+x)^{\frac{5}{2}} - 10 \cdot a \cdot (a+x)^{\frac{3}{2}} + 4 \cdot a^{\frac{5}{2}}}{15}$$

$$= \tfrac{2}{15} \left[(a+x)^{\frac{3}{2}} \cdot (3 \cdot (a+x) - 5a) + 2a^{\frac{5}{2}} \right]$$

$$= \tfrac{2}{15} \left[(a+x)^{\frac{3}{2}} \cdot (3x - 2a) + 2 \cdot a^{\frac{5}{2}} \right] = \frac{cQ}{k}$$

welches den Werth von Q wie im Buch giebt. Ich erinnere übrigens, daß ſich a. a. O. der An. d. Un. 2te Ausg. in den hierhergehörigen Stellen keine Druckfehler befinden.

§. 112. (K. §. 198.)

Das Integral $\int dx \sqrt{(a+x)}$ giebt ſich hier nach den gewöhnlichen ganz leichten Integrationsregeln, vielleichter und hurtiger, als durch eine umſtändliche Vergleichung mit (An. d. Un. 248.). Es iſt nämlich $dx \sqrt{(a+x)} = (a+x)^{\frac{1}{2}} \cdot d(a+x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (a+x)^{\frac{3}{2} - 1} d(a+x)$ alſo

$$\int dx \sqrt{(a+x)} = \tfrac{2}{3} \cdot (a+x)^{\frac{3}{2}}$$

Das giebt nun $Q = \int k\,dx \sqrt{(a+x)} - \int \frac{kx\,dx}{c} \sqrt{(a+x)}$

Nimmt man alſo das letzte Integral mit Weglaſſung der Conſt. $\frac{2k}{15 \cdot c} \cdot 2a^{\frac{5}{2}}$ aus (K. 196.), ſo hat man

$$Q = \frac{2k}{3} \cdot (a+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15} \cdot \frac{k}{c} \cdot (a+x)^{\frac{3}{2}} \cdot (3x - 2a) + \text{Conſt.}$$

Und da Q für x = o verſchwindet, ſo hat man

$$o = \frac{2k}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}} - \frac{2k}{15 \cdot c} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot (-2a) + \text{Conſt.}$$

alſo $$\text{Conſt} = -\frac{2k}{3} \cdot a^{\frac{3}{2}} - \frac{2k}{15 \cdot c} \cdot 2 \cdot a^{\frac{5}{2}}$$

und

und nun

$$Q = \frac{2k}{3} \cdot \left[(a+x)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \frac{3x-2a}{5c}\right) - a^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \frac{2a}{5c}\right)\right]$$

wo man nur c statt x schreibt, um S zu bekommen.

§. 113. (K. §. 199.)

Das liese sich auch aus (K. 193. II. und 197.) unmittelbar so schliesen: die Wassermenge in (199) ist der Unterschied beider Wassermengen (K. 197. und 193 II.) also =

$$2(\sqrt{fg}) \cdot \tfrac{2}{3} kc - 2(\sqrt{fg}) \cdot \tfrac{2}{5} kc$$
$$= (\tfrac{4}{3} - \tfrac{4}{5}) \cdot kc \cdot \sqrt{fg}$$
$$= \frac{20-12}{15} \cdot kc \cdot \sqrt{fg} = \tfrac{8}{15} kc \cdot \sqrt{fg}.$$

Und so hätte sich gleichfalls die allgemeine Formel (K. 198.) finden lassen.

§. 114. (K. §. 201.)

Viel bequemer noch läßt sich die Rechnung anstellen, wenn man auf folgende Art verfährt. Man ziehe MP (fig. 20.) horizontal, und verlängere nun ON bis P, so ergeben sich die beiden Dreiecke MOP, MNP, und der Unterschied derer, durch diese beiden Dreiecke, in einer Sec. fliesenden Wassermengen, ist die Wassermenge S′, welche durch OMN in 1 Secunde fließt. Man fälle also auf MP die Perpendikel OI, NL, und berechne nun

I.)	den Ausfluß durch	OIM	deren Summe heise M
II.)	—— ——	OIP	
III.)	—— ——	NLM	deren Summe heise M′
IV.)	—— ——	NLP	

so ist $S' = M - M'$. Bei dieser Rechnung hat man 1.) den Vortheil, daß man weiter keine Formel als die (K. 196.) nöthig hat. 2.) den noch beträchtlichern, daß man für I. und II. nur einerlei c = OI und einerlei a, und so für III. und IV. wieder nur einerlei c = NL und einerlei a hat. Ich will das zu M′ gehörige a zum Unterschied a′, so wie das dazu gehörige c nicht c sondern c′ nennen, so ist

M=

$$M = \frac{2\,(MI + IP)}{15 \cdot c}\left[(a+c)^{\frac{3}{2}}\,(3c - 2a) + 2a^{\frac{5}{2}}\right] \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{hg}{a}}$$

Ebenso

$$M' = \frac{2(ML + LP)}{15 \cdot c'}\left[(a'+c')^{\frac{3}{2}} \cdot (3c' - 2a') + 2(a')^{\frac{5}{2}}\right] 2 \cdot \sqrt{\frac{hg}{a}}$$

also

$$S' = \tfrac{4}{15}\sqrt{\frac{hg}{a}}\left(\frac{MI + IP}{c}\left[(a+c)^{\frac{3}{2}} \cdot (3c - 2a) + 2a^{\frac{5}{2}}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{ML + LP}{c'} \cdot \left[(a'+c')^{\frac{3}{2}} \cdot (3c' - 2a') + 2(a')^{\frac{5}{2}}\right]\right)$$

oder weil $MI + IP = MP = ML + LP$ ist, so ist

$$S' = \tfrac{4}{15} \cdot MP\left(\sqrt{\frac{gh}{a}}\right)\left(\frac{(a+c)^{\frac{3}{2}} \cdot (3c - 2a) + 2a^{\frac{3}{2}}}{c}\right.$$
$$\left. - \frac{(a' + c')^{\frac{3}{2}} \cdot (3c' - 2a') + 2 \cdot (a')^{\frac{5}{2}}}{c'}\right) (h$$

Läge der Wasserspiegel in einer durch ST horizontal gelegten Ebene, so wären die Perpendikel OQ, NR auf diese Ebene die Werthe von a, a'. Wenn man übrigens die Winkel μ, ν, ϱ hat, so hat man nicht einmal nöthig, das Dreieck MNP auszuzeichnen, sondern hat

$$OI = c = MO \cdot \sin(\mu + \varrho)$$
$$NL = c' = MN \cdot \sin \varrho)$$

Nun ist ferner $\sin \varphi = \sin(\varrho + 180° - \nu) = \sin(\nu - \varrho)$

also $\sin(\nu - \varrho) : MN = \sin \nu : MP$

und daher $$MP = \frac{MN \cdot \sin \nu}{\sin(\nu - \varrho)}$$

daher läßt sich die Formel auch so ausdrucken

$S' =$

$$S' = \frac{4 \cdot MN \cdot \sin \nu}{15 \cdot \sin(\nu - \varrho)} \cdot \left(\sqrt{\frac{gh}{a}}\right) \cdot \left(\frac{(a + MO \cdot \sin \cdot (\mu + \varrho))^{\frac{5}{2}}}{MO \times} \right.$$

$$\frac{\times (3\,MO \cdot \sin(\mu + \varrho) - 2a) + 2 \cdot a^{\frac{5}{2}}}{\sin(\mu + \varrho)} - \frac{(a' + MN \cdot \sin \varrho)^{\frac{5}{2}}}{MN}$$

$$\left. \frac{\times (3\,MN \cdot \sin \varrho - 2a') + 2 \cdot (a')^{\frac{5}{2}}}{\times \sin \varrho} \right) \quad (\frac{1}{\delta}$$

Es würde aber wohl sicherer und bequemer sein OI, NL, MP wirklich zu messen, als zu berechnen, daher die Formel ($\frac{1}{\eta}$) für die Ausübung der ($\frac{1}{\delta}$) wohl vorzuziehen wäre, wenn es nämlich in der Ausübung verstattet ist, alle Theile wirklich zu verzeichnen und auszumessen.

§. 115. (K. §. 202.)

Wie weitläuftig dergleichen allgemeine Formeln für andere geradlinigte irreguläre Figuren ausser den Dreiecken werden müßten, läßt sich aus der Formel ($\frac{1}{\delta}$) vor § schliesen. Für reguläre Figuren, werden die Formeln geschmeidiger. Ein Exempel giebt folgende Aufgabe;

Den Durchfluß durch ein reguläres Sechseck abcdefa (fig. 21.) wo die durch die beiden Spitzen a und d gehende gerade Linie ad vertikal steht, zu finden.

Aufl. Man ergänze das Sechseck zu einem Rectangel pqklg, wo also pq, kl horizontal liegen.

I.) Der Durchfluß durch dieses Rectangel, den Grenze pq um die Tiefe a unter dem Wasserspiegel liegt, ist (K. 187.) =

$$2 \left(\sqrt{\frac{hg}{a}}\right) \cdot \tfrac{2}{3}\, b \cdot \left((a + c)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{hg}{a}}\right) \cdot \tfrac{2}{3}\, b \cdot \left((a + 2r)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)$$

wo r den Halbmesser $\gamma f = \gamma a$ des um das Vieck beschriebenen Kreises bedeutet, der bekanntlich = fa ist.

Digitized by Google

II. Der Durchfluß durch die beiden gleichen Dreiecke apf, aqb ist zusammen (K. 198.)

$$= 2\left(\sqrt{\frac{hg}{a}}\right) \cdot \frac{2 \cdot 2k}{3} \cdot \left((a+c)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \frac{3c - 2a}{5c}\right) - a^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 + \frac{2a^{\frac{5}{2}}}{5c}\right)\right)$$

; aber hier ist $2k = pq = b$, und $c = qp = \frac{qp + ck}{2} = \frac{qk - bc}{2} = \frac{2r - r}{2} = \frac{1}{2}r$, also der erwähnte Durchfluß $= 2\left(\sqrt{\frac{gh}{a}}\right) \cdot \frac{2}{3}b\left((a + \frac{1}{2}r)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2r + 4a}{5r}\right) - a^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 + \frac{4a}{5r}\right)\right)$.

III. Der Durchfluß durch die beiden gleichen Dreiecke eld, ckd ist, wenn man nun $a + pe = a + \frac{3r}{2}$ statt a schreibt, und wieder $2k = b$, und $c = \frac{1}{2}r$, also $\frac{2 \cdot 2k}{15 \cdot c} = \frac{2b}{15 \cdot \frac{1}{2}r} = \frac{4b}{15 \cdot r}$ und $a + c = a + \frac{3r}{2} + \frac{r}{2} = a + 2r$ setzt, $=$

$$2\left(\sqrt{\frac{gh}{a}}\right) \cdot \frac{4b}{15 \cdot r}\left((a + 2r)^{\frac{3}{2}} \cdot (-2a - \tfrac{1}{2}r) + 2 \cdot (a + \tfrac{1}{2}r)^{\frac{5}{2}}\right)$$

Es ist aber $b = 2 \cdot \sin 60° = 1{,}73204 \cdot r$

das giebt also $\frac{2}{3}b = 1{,}15469 \cdot r$

und $\frac{4b}{15 \cdot r} = 0{,}46187$

und so ist also der Durchfluß durch das Vieck =

$$2\left(\sqrt{\frac{hg}{a}}\right) \times \left(1{,}15469 \cdot r \times \left[(a + 2r)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} - (a + \tfrac{1}{2}r)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2r + 4a}{5r} + a^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 + \frac{4a}{5r}\right)\right] - 0{,}46187 \cdot \left((a + 2r)^{\frac{3}{2}} \cdot (-2a - \tfrac{3}{2}r) + 2 \cdot \left(a + \frac{3r}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\right)\right) \quad (\mathfrak{Y})$$

Er. Es sei $a = 3$ Fus und $r = \frac{1}{2}$ F. und $\frac{hg}{a}$ hier $= 12$, also $2\sqrt{\frac{hg}{a}} = 6{,}928$; so ist weiter $(a + 2r)^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{4} = 8$; $a^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$ $= 3 \cdot 1{,}73205 = 5{,}19645$, also $(a + 2r)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} = 8 - 5{,}19645$ $= 2{,}80355$; ferner $2a + \frac{3}{2}r = 6 + \frac{3}{4}$, und $-(2a + \frac{1}{2}r) \cdot (a+2r)^{\frac{1}{2}}$ $= -6{,}75 \cdot 8 = -54$; $2 \cdot (a + \frac{3}{2}r)^{\frac{5}{2}} = 2 \cdot \left(a + \frac{3r}{2}\right)^{2} \cdot \sqrt{\left(a + \frac{3r}{2}\right)} = 2 \cdot 14{,}0625 \cdot 1{,}936 = 54{,}45$; weiter $\frac{2r + 4a}{5r}$ $= \frac{1 + 12}{5 : 2} = \frac{26}{5} = 5{,}2$; und $(a + \frac{1}{2}r)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2r + 4a}{5r} = 5{,}856 \cdot 5{,}2$ $= 30{,}451$; ferner $\frac{4a}{5r} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{5} = \frac{24}{5} = 4{,}8$; $1 + \frac{4a}{5r} = 5{,}8$; und $a^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 + \frac{4a}{5r}\right) = 5{,}19645 \cdot 5{,}8 = 30{,}139$; endlich $1{,}1546 \cdot r$ $= 0{,}5773$; also nun der Durchfluß durch das Vieck $=$

$$6{,}928 \cdot \left(0{,}5773 \cdot \left(2{,}8035 - 30{,}451 + 30{,}139\right) - 0{,}4618 \cdot (-54 + 54{,}45)\right)$$

$$= 6{,}928 \cdot (0{,}5773 \cdot 2{,}491 - 0{,}4618 \quad 0{,}45)$$

$$= 6{,}928 \cdot (1{,}438 - 0{,}207) = 6{,}928 \cdot 1{,}231$$

$$= 8{,}528 \text{ Cub. Fus.}$$

§. 116. (K. §. 205.)

Man vergleiche nämlich hier wieder $(2r - x)^{\frac{1}{2}} \cdot x\,dx$ mit $x^{r\,n} \cdot x^{n-1} \cdot (a + bx^n)^p dx$ (An. d. Un. a. a. O.) so geben sich die gehörigen Substitutionen. Und diese Substitutionen nun gebrauche man in dem 196 § Erl. am Anf. beigebrachten Werth des Integrals, so giebt sich hier

$$S(2r - x)^{\frac{1}{2}} \cdot x\,dx =$$

$$\frac{z^{\frac{1}{2}+1} \cdot \left(\frac{z^1}{\frac{1}{2}+1+1} - \frac{2r}{\frac{1}{2}+\cdot}\right) - (2r)^{\frac{1}{2}+1+1} \cdot \left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1+1} - \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\right)}{-1^{1+1}}$$

$$= -(2r)^{\frac{5}{2}} : \left(\frac{1}{5:2} - \frac{1}{3:2}\right) + z^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{z}{5:2} - \frac{2r}{3:2}\right)$$

und $2r - x$ statt z gesetzt, $=$

$$(2r)^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) + (2r - x)^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2(2r - x)}{5} - \frac{2 \cdot 2r}{3 \cdot}\right)$$

$$= \frac{4}{15} \cdot 2^{\frac{5}{2}} \cdot r^{\frac{5}{2}} - \left[\left(\frac{20}{15} - \frac{12}{15}\right) \cdot r + \frac{2x}{5}\right](2r - x)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{16}{15} \cdot 2^{\frac{5}{2}} \cdot r^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{15} \cdot (4r + 3x) \cdot (2r - x)^{\frac{3}{2}} \text{ oder}$$

$$= \frac{16}{15} \cdot 2^{\frac{5}{2}} \cdot r^2 \cdot r^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{15} \cdot (4r + 3x) \cdot (2r - x)^{\frac{3}{2}}$$

welches die Gleichung für Q im Buch ist.

§. 117. (K. §. 206.)

I. Die Wassermenge wird nämlich $=$

$$2\sqrt{\frac{gf}{r}} \cdot \frac{16\sqrt{2} - 14}{15} \cdot r^2 \sqrt{r}$$

$$= 2\sqrt{gf} \cdot \frac{16 \cdot \sqrt{2} - 14}{15} \cdot r^2$$

unter

unter des Wassers Oberfläche stünde ꝛc. und dessen Durchmesser als seine Grundlinie horizontal läge.

II. Aus (K. 186. VI.) ist klar, daß um die durch den halben Kreis, dessen Durchmesser als Grundlinie vertikal steht, in 1 Sec. fliesende Wassermenge zu finden, S nicht mit $\sqrt{\frac{gf}{2r}}$ sondern mit $2\sqrt{\frac{gf}{2r}}$ multiplicirt werden müsse, und das giebt diese Wassermenge $\frac{16\sqrt{2}}{15} \cdot r^2\sqrt{r} \cdot 2\sqrt{\frac{gf}{2r}} = \frac{16 \cdot r^2 \cdot 2\sqrt{gf}}{15}$, und nun die Wassermenge durch den ganzen Kreis $= \frac{32 \cdot r^2 \cdot 2\sqrt{gf}}{15} = \frac{8}{15} \cdot (2r)^2 \cdot 2\sqrt{gf}$ welches mit Worten ausgedruckt die Belidorsche Regel giebt.

§. 118. (K. §. 207.)

Ich will hier gleich zum voraus erinnern, daß zum Gebrauch der am Ende dieses §. im Buch befindlichen Formel, noch eine nothwendige Erinnerung gehört, die man (211) findet.

allgemein integrirn ꝛc. Doch läßt sich in einem besondern Fall, den ich gleich nennen will, auch ohne diese allgemeine Integration fortkommen, wo nicht $a = o$. Wenn $a = r$, und der Bogen nicht über, sondern unter dem horizontal gelegten Durchmesser, also des Bogens unterste Stelle, um die Länge des Durchmessers, unter dem Wasserspiegel läge. In diesem Fall wäre die durch den Halbkreis fliesende Menge $= \frac{32}{15} \cdot r^2 \cdot 2\sqrt{gf} - \frac{32\sqrt{2} - 28}{15} \cdot r^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{gf'}$; weil nämlich das f (206.) in I. von dem in II. verschieden ist, so habe ich das in I. f' genannt; es ist also die Wassermenge $=$

$$r^2 \cdot 2\sqrt{g} \cdot \left(\frac{32 + 28 - 32\sqrt{2}}{15}\right) \cdot \left(\sqrt{f} - \sqrt{f'}\right)$$

$$= \left(8 - \frac{64\sqrt{2}}{15}\right) \cdot (\sqrt{f} - \sqrt{f'}) \cdot r^2 \cdot \sqrt{g}$$

und also die durch einen so gestellten Quadranten fliesende Wassermenge =

$$\left(4 - \frac{32\sqrt{2}}{15}\right) \cdot (\sqrt{f} - \sqrt{f'}) \cdot r^2 \cdot \sqrt{g}$$

oder $= \left(4 - \frac{32\sqrt{2}}{15}\right) \cdot (\sqrt{f} - \sqrt{\frac{1}{2}f}) \cdot r^2 \cdot \sqrt{g}$

Für alle übrige Fälle aber, wo a nicht = o ist, ist eine allgemeine Integration für dQ nöthig, die sich aber nach An. d. Un. 399. XI. nicht algebraisch angeben läßt, sondern eine Auflösung in unendliche Reihen erfodert. Daher setzt man statt $\sqrt{(2x - x^2)} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{x}{a}\right)}$ hier $(\sqrt{2}) \cdot (\sqrt{a})$

$$\times \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{4} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{32} \cdot \cdot \cdot\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} + \frac{x^3}{16a^3} \cdot \cdot \cdot\right)$$

wo es nur drauf ankommt, die beiden unendlichen Reihen in einander zu multipliciren; das Produkt giebt wieder eine Reihe, die nach Potenzen von x geordnet wird. Will man dieses Produkt bis auf eine gewisse Potenz von x genau haben, so hat man folgendes zu überlegen. Das erste Glied des ersten Faktors $\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{4} \cdot \cdot\right)$ ist $x^{\frac{1}{2}}$, das zweite $x^{1+\frac{1}{2}}$ oder $x^{2-\frac{1}{2}}$, das dritte $x^{3-\frac{1}{2}}$, das vierte $x^{4-\frac{1}{2}}$ u. s. w. also das nte $x^{n-\frac{1}{2}}$. Will man also das Produkt bis auf die Potenz $n - \frac{1}{2}$ von x richtig haben, so nehme man von den Factor $x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{4} \cdot \cdot \cdot$ n Glieder, und nun multiplicire man diesen ngliedrigen Faktor, mit dem zweeten Faktor $\left(1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{8a^2} \cdot \cdot \cdot\right)$ also I.) mit 1. II.) mit $+\frac{x}{2a}$, III.) mit $-\frac{x^2}{8a^2}$, IIII.) mit $+\frac{x^3}{16a^3}$ u. s. w. Wenn ich im zweeten Faktor, die Glieder von der 1 zu zählen anfange, so enthält das erste Glied x^0, das zweite x^1, das dritte x^2 u. s. w. also das nte x^{n-1}; dieses nte mit dem ersten Glied des ersten Faktors multiplicirt giebt $x^{n-1} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{n-\frac{1}{2}}$; die Folge hieraus ist diese

dieſe, daß man, um das Produkt aus beiden Faktoren bis auf die Potenz $n - \frac{1}{2}$ von x richtig zu erhalten, vom zweeten Faktor n Glieder nöthig habe. Das letzte davon mit dem erſten des erſten Faktors multiplicirt, giebt nämlich alsdann die Potenz $x^{n-\frac{1}{2}}$, und ſo muß alſo der erſte Faktor überhaupt in n Glieder des zweeten multiplicirt werden, oder man hat überhaupt n Summen von Multiplicationen nöthig, wobei ich nur noch folgendes bemerke; bei der erſten Summe von Multiplikationen, die in die 1. geſchieht, braucht man den erſten Faktor ganz, d. i. n Glieder, bei der zwoten, die in $-\frac{x}{2a}$ geſchieht, braucht man von ihm nur die erſten $n - 1$ Glieder, weil davon das letzte $x^{n-\frac{1}{2}}$ mit x multiplicirt, doch die Potenz $x^{n-\frac{1}{2}}$ giebt; eben ſo braucht man bei der dritten Multiplication, die in $\frac{x^2}{8a^2}$ geſchieht, vom erſten Faktor nur $n - 2$ Glieder, bei der vierten nur $n - 3$ Glieder u. ſ. w. und alſo bei der letzten, welches die nte iſt; nur $n - (n - 1)$ d. i. nur das erſte Glied $x^{\frac{1}{2}}$. Alſo iſt die ganze Anzahl von Gliedern, die durch eine andere Gröſſe multiplicirt werden müſſen, um das Produkt bis auf $x^{n-\frac{1}{2}}$ genau zu erhalten, oder die Anzahl *aller einzelnen* Multiplikationen $= n + (n - 1) + (n - 2) \cdots + 1 = \frac{1}{2} n \cdot (n + 1) = \frac{n^2 + n}{2}$. Im Buch iſt das Produkt bis auf $x^{8\frac{1}{2}}$ oder $x^{8-\frac{1}{2}}$ berechnet, und wenn man nun $n = 8$ ſetzt, ſo giebt ſich die Anzahl aller hier zu nöthigen *einzelnen Multiplikationen* $= \frac{8^2+8}{2} = \frac{64+8}{2} = 36$; und ſoviele einzelne Köefficienten müſſen alſo auch berechnet werden, wie man auch wirklich findet, wenn man alle zu denen ſämmtlichen Potenzen von x, von $x^{\frac{1}{2}}$ an bis $x^{8\frac{1}{2}}$ gehörige Köefficienten zuſammenrechnet. Die Rechnung bis zu $x^{8\frac{1}{2}}$ oder $x^{16-\frac{1}{2}}$ fortzuſetzen, hätte man $\frac{16^2+16}{2} = \frac{240}{2} = 120$ einzelne Multiplikationen nöthig, und da iede für ſich ganz leicht iſt, ſo ſieht man, daß ſich dieſe Rechnung ohne viele Mühe ſehr weit fortſetzen läßt, und alſo $Q =$

$$2(\sqrt{2a}\,x) \cdot (\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{5}\mathfrak{A}x^2 + \tfrac{1}{7}\mathfrak{B}x^3 \cdots)$$

ſich

ſich ſo genau man will berechnen läßt. Aber auf ſolche Art läßt ſich allemal unmittelbar nur der Ausfluß durch einen *ganzen* Kreis, oder durch einen *ſolchen* Kreisabſchnitt finden, deſſen Grundlinie oder Sehne 1.) *horizontal*, 2.) *unter* dem Bogen liegt.

Verlangte man den Durchfluß durch den Kreisabſchnitt acba, (fig. 22.), ſo gäbe ſolchen die gefundene Formel nicht *unmittelbar*, man könnte ſich ihrer aber doch in *gewißen* Fällen zu dieſer Berechnung bedienen. Es ſei nämlich cd der vertikale Durchmeſſer des Kreiſes acbda, der die horizontale Sehne ab in e ſchneidet; iſt nun ed < a, ſo berechne man den Durchfluß für den ganzen Kreis adbca, und dann auch für den Kreisabſchnitt adbea nach der gefundenen Formel; der letztere vom erſtern abgezogen, giebt den Durchfluß für aebca.

Aber dieſe Rechnung geht nur an, ſo lange ed < a iſt; wird ed > a, ſo ragt d über die Oberfläche des Waſſers hervor, und es iſt alſo nun nicht mehr verſtattet, den Durchfluß durch den ganzen Kreis, nach der erwähnten Formel zu berechnen, ſo wäre eine beſondere Rechnung nöthig. $\alpha m \beta$ ſei horizontal und liege in der Ebene des Waſſerſpiegels, ſo müßte man den Durchfluß durch iedes Stück wie faebgmf ſuchen, für das dann a = o wäre. Es ſei, wie bisher mc = c, und die Abſciſſen werden vom m nach c gerechnet, ſo iſt überhaupt

$$\begin{aligned}
& dt : tv = tv : tc \\
\text{oder } & dt : y = y : tc \\
\text{und } & y^2 = dt \times tc \\
\text{aber } dt = md + mt &= cd - cm + mt \\
&= 2r - c + x \\
\text{und } tc &= c - x \\
\text{alſo } y^2 &= (2r - c + x) \cdot (c - x) \\
&= c \cdot (2r - c) + 2 \cdot (c - r) \cdot x - x^2
\end{aligned}$$

das ich kurz ſo ausdrucken will

$$\begin{aligned}
y^2 &= A + Bx - x^2 \\
\text{alſo } y &= \sqrt{(A + Bx - x^2)} \\
\text{wo } A &= c \cdot (2r - c);\ B = 2 \cdot (c - r) \text{ iſt.}
\end{aligned}$$

Nun

Nun ist überhaupt

$$dQ = y \cdot \sqrt{(a+x)} \cdot dx \quad (\text{K. 186. VI.})$$

also für $a = o$, wie es hier ist,

$$dQ = y \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$

und den Werth von y substituirt, giebt

$$dQ = \sqrt{(A + Bx - x^2)} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx,$$

und nach der Methode wie (Alg. 625) findet sichs weiter =

$$\left(\sqrt{A} - \frac{B}{2\sqrt{A}} \cdot x - \frac{B^2 - 4A}{8A \cdot \sqrt{A}} \cdot x^2 - \frac{B^3 - 4AB}{16A^2\sqrt{A}} \cdot x^3 - \frac{5B^4 - 24AB^2 - 16A^2}{128 \cdot A^3 \cdot \sqrt{A}} \cdot x^4 - \frac{7B^5 - 40AB^3 - 48A^2B}{256 \cdot A^4 \cdot \sqrt{A}} \cdot x^5 \cdot \ldots\right) \cdot x^{\frac{1}{2}}\, dx$$

Folglich

$$Q = x^{\frac{3}{2}} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{A} - \frac{B}{5\sqrt{A}} \cdot x - \frac{B^2 - 4A}{28A \cdot \sqrt{A}} \cdot x^2 - \frac{B^3 - 4AB}{72A^2 \cdot \sqrt{A}} \cdot x^3 - \frac{5B^4 - 24AB^2 - 16A^2}{704 \cdot A^3\sqrt{A}} \cdot x^4 - \frac{7B^5 - 40AB^3 - 48A^2B}{1664 \cdot A \cdot \sqrt{A}} \cdot x^5 \cdot \ldots\right) \quad (\text{h})$$

wo keine Conft. hinzukommt, weil dieses Integral für $x = o$ verschwinden muß. Diesen Werth von Q mit $4\sqrt{\frac{gh}{a}}$ noch multiplicirt, giebt nun die zu jedem x gehörige durchfliesende Wassermenge für eine Secunde.

Setzte man z. B. $x = me$, so erhielte man auf solche Art die Wassermenge, welche in jeder Sec. durch die Oefnung afmgbea flösse.

Für $x = mc$ giebt ſich das durch facbgmf flieſende Waſſer; ſucht man alſo nun die durch acbca durchflieſende Waſſermenge für $ed > a$ oder $a + c < 2r$, ſo berechnet man zuerſt den Durchfluß für den ganzen, unter dem Waſſerſpiegel $\alpha\beta$, ſtehenden Kreisabſchnitt facbg, und dann den Durchfluß durch facbg nach der gefundenen Formel; letzterer vom erſtern abgezogen giebt den Durchfluß für acbca. Und nun kann für kreisförmige Oefnungen mit horizontalen Sehnen keine Aufgabe mehr vorkommen, für die ſich nicht der Durchfluß allemal aus einer der gefundenen Formeln finden lieſe.

Da öfterer Fälle vorkommen werden, wo man Waſſer durch eine kreisförmige Oefnung wie facbg, als ſolche, wo man es durch die umgekehrte Oefnung afdgb flieſen läßt, ſo wunderts mich, daß ſogar **Belidor** unter ſeinen vielen hierhergehörigen Berechnungen die hier gefundene allgemeine Formel für Q (ħ) nicht beigebracht hat, und a. a. O. §. 553. nur den beſondern Fall betrachtet, wenn fg durch den Mittelpunkt geht, alſo m ſelbſt der Mittelpunkt iſt, da dann die Formel $y^2 = r^2 - x^2$ einfacher wird, als in der Allgemeinheit, wie ich ſie ausgedruckt habe.

§. 119. (K. §. 210.)

Aber das läßt ſich nur, wie ich bei 207 erinnert habe, auf Fälle anwenden, wo nicht $a + c < 2r$ iſt. Für $a + c < 2r$ giebt dieſes Verfahren die hier im Buch genannte Waſſermenge nicht.

§. 120. (K. §. 211.)

Für die Formel (ħ) Erl. zu (207) hat man alle dieſe Erinnerungen nicht nöthig, weil die Werthe von A und B, r enthalten, das ich nicht = 1 geſetzt habe. Uebrigens fällt in die Augen, daß auch in (ħ) der Werth von Q, $2\frac{1}{2}$ Abmeſſungen hat. Es iſt nämlich $A = c \cdot (2r - c)$, hat alſo zwo Abmeſſungen, und daher $\frac{2}{3}\sqrt{A}$ nur eine Abmeſſung, das in $x^{\frac{3}{2}}$ welches $1\frac{1}{2}$ Abmeſſungen hat, multiplicirt $1 + 1\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$ Abmeſſungen giebt. Ferner $B = 2 \cdot (c - r)$ hat nur eine Abmeſſung, alſo $\frac{B}{\sqrt{A}}$ eine bloſe Zahl, die keine Abmeſſung hat, und daher $\frac{B}{\sqrt{A}} \cdot x$ eine Abmeſſung, welches in $x^{\frac{3}{2}}$ multiplicirt, wieder $2\frac{1}{2}$ Abmeſſungen giebt. Ferner des dritten Glieds Zähler iſt $B^2 - 4A$ wo ſowohl B^2 als $4A$ zwo Abmeſſungen hat, der Nenner iſt

$28 A\sqrt{A}$, wo A zwo Abmessungen hat, und $\sqrt{A}$ eine, also ist $\frac{B^2 - 4A}{28 \cdot A}$ wieder eine bloße Zahl von keiner Abmessung, und $\frac{x^3}{\sqrt{A}}$ hat eine Abmessung, also hat das dritte Glied $\frac{B^2 - 4A}{28 \cdot A\sqrt{A}} \cdot x^3$ wieder nur eine Abmessung, und erhält durch die Multiplikation mit $x^{\frac{3}{2}}$ wieder $2\frac{1}{2}$ Abmessungen u. s. f.

§. 121. (K. §. 213.)

Ich will hier noch eine Aufgabe beibringen, die in der Ausübung ihren Nutzen haben kann.

nbcd (fig. 23.) sei eine horizontale kreisförmige Oefnung in einer in einem Wasserbehälter befindlichen Grundkännel. AB, CD sind Pfosten, worauf die Welle AC mit ihren Zapfen aufliegt, die man dann vermittelst des Arms no herumdrehen kann; lfq ist ein kegelförmiger Zapfen, den man auch den Schlüssel nennt, weil man mit ihm die Oefnung verschliesen kann. Dieser Zapfen ist an eine Stange me befestigt, um die man nun eine an der Welle AB befestigte Kette pe schlingt, um so durchs Umdrehen der Welle den Zapfen mehr oder weniger in die Höhe ziehen zu können.

Die gesammten Abmessungen des Zapfens nebst der Länge der Stange em = λ sind gegeben; man soll aus der iedesmaligen Entfernung pe die durch abcd herauslaufende Wassermenge bestimmen.

Aufl. Ich kann annehmen, daß die Länge $m\nu$ von der Mitte in lq bis an die Spitze des ganz ausgezeichneten Kegels $l\nu q$ gegeben wäre, weil sie sich bald finden läßt. Nimmt man nun auf der vertikalen Linie νm die Abscissen x, und setzt die darauf senkrechten Ordinaten = y, so ist

$$x : y = \nu m : mq$$

also

$$y = \frac{mq}{\nu m} \cdot x;$$

der Oefnung Halbmesser heist r, soll also der Zapfen diese Oefnung verschliesen, so muß

$$y = r \text{ oder}$$

$$\frac{ntq}{ym} \cdot x = r \text{ sein.}$$

und das giebt $x = \frac{ym}{mq} \cdot r$, und die Höhe γ des noch über die Oefnung in diesem Fall hervorragenden Theils des Zapfens, ist demnach $= ym - x = ym - \frac{ym}{mq} \cdot r$, oder wenn ich $ym = \alpha$, $mq = \beta$ setze, so ist

$$\gamma = \alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} r\right)$$

folglich die Höhe von e bis auf die Oefnung in dem Fall, da der Zapfen die Oefnung völlig verschliest, $=$

$$\lambda + \gamma = \lambda + \alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} r\right)$$

welches also die geringste Höhe von e ist. Wird nun der Zapfen oder die Stelle e um die Höhe λ' weiter aufgezogen, so ist das von y bis an die Oberfläche der Oefnung gehende $x = \frac{\alpha}{\beta} \cdot r - \lambda'$, also

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \cdot x = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot r - \lambda'\right)$$

$$= r - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \lambda'$$

und folglich die Kreisfläche, worin der Zapfen die Oberfläche der horizontalen Oefnung schneidet, $=$

$$3{,}141 \cdot y^2 = 3{,}141 \cdot \left(r - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \lambda'\right)^2$$

Des obersten Punkts der Welle p ihre Höhe über die Oefnung heise ζ, so ist, wenn die Oefnung verschlossen ist,

$$pe = \zeta - \left(\lambda + \alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \cdot r\right)\right)$$

folglich

folglich in allen Fällen,

$$\lambda' = \zeta - \left(\lambda + \alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \cdot r\right)\right) - pe$$

und daher die eben erwähnte Kreisfläche =

$$3{,}141 \cdot \left[r + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(-\zeta + pe + \lambda + \alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot r\right)\right]^2$$

Aber die Oberfläche der Oefnung $= 3{,}141 \cdot r^2$ folglich der Ring, welcher noch von der Oefnung rings um den Zapfen herum übrig bleibt =

$$3{,}141 \cdot \left(r^2 - \left[r + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \left(-\zeta + pe + \lambda + \alpha \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot r\right)\right]^2\right)$$

und dieser mit $2\sqrt{gk}$ multiplicirt, giebt die für die jedesmalige Entfernung pe durch die Oefnung herauslaufende Wassermenge, wo man, wie man sich wegen des Werths von k zu verhalten habe, aus dem Bisherigen beurtheilen muß.

§. 122. (K. §. 214.)

Man kann sich aber doch in dergleichen Fällen auf andere Arten der Wahrheit sehr nähern.

Der Inhalt des um den Kreis beschriebenen Quadrats pqkl (fig. 24.) ist $4r^2$; ich nehme die obere Seite pq folglich auch die untere lk horizontal und pl, qk vertikal an. Wenn nun die iede Secunde durch dieses Quadrat durchfliesende Wassermenge δ und so der Durchfluß durch den Kreis Δ heist, so kann man beinahe seßen

$$4r^2 : 3{,}141 \cdot r^2 = \delta : \Delta$$

$$\text{also } \Delta = \frac{3{,}141}{4} \cdot \delta$$

$$= 0{,}785 \cdot \delta \quad (\odot$$

da dann δ aus 202. no. I. daselbst $b = 2r$ geseßt, gegeben wäre.

Es sei alles, wie im Er. 202. Erl. so ist

$$\delta = 6{,}928 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 2{,}803 = 12{,}946 \text{ C. Fus.}$$

$$\text{also } \Delta = 0{,}785 \cdot 12{,}946 = 10{,}15 \text{ C. Fus.}$$

wo man Δ gewiß dem wahren Werth so nahe hat, als es in der Ausübung verlangt werden kann. Und ganz genau Δ zu finden, verstattet schon der ungewisse Werth von $\frac{hg}{a}$, den ich hier = 12 gesetzt habe, nicht.

Die Richtigkeit dieser Rechnung in die Augen fallend zu machen, will ich einen Fall vornehmen, wo a = 0 ist; alles übrige bleibe nun wie vorhin, so wird

$$\delta = \left(2\sqrt{\frac{hg}{a}}\right) \cdot \frac{4}{5} r \cdot (2r)^{\frac{1}{2}}$$

aber $2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} = 2{,}82842$ (*)

und $\frac{4}{5} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{11{,}31368}{3} = 3{,}77122$ also

$$\delta = \left(2\sqrt{\frac{gh}{a}}\right) \cdot 3{,}7712 \cdot r^{\frac{1}{2}}$$

folglich wie in (⊙)

$$\Delta = 0{,}785 \cdot \left(2\sqrt{\frac{gh}{a}}\right) \cdot 3{,}7712 \cdot r^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(2\sqrt{\frac{gh}{a}}\right) \cdot 2{,}960 \cdot r^{\frac{1}{2}}$$

Nach (206. II.) aber erhält man

$$\frac{16}{15} \cdot 2{,}8284 \cdot r^{\frac{1}{2}} \cdot \left(2\sqrt{\frac{hg}{a}}\right)$$

$$= \left(2\sqrt{\frac{hg}{a}}\right) \cdot 3{,}017 \cdot r^{\frac{1}{2}}$$

welches das wahre Δ ist; also verhält sich mein Δ zum wahren, für a = 0, wie

2,960 zu 3,017

und

*) Zu dergleichen Rechnungen sind die Schulzischen Tafeln Vol. II. p. 288. 291. überaus bequem.

und bei meinem wird gefehlt um

$$\frac{3{,}017 - 2{,}960}{3{,}017} \cdot \Delta \text{ oder } 0{,}018 \cdot \Delta$$

also nicht völlig um $\frac{1}{55}\,\Delta$. Man sieht aber leicht, daß dieser Fehler hier nicht in Betracht kommt, da man wegen des ungewissen Werths von $\frac{hg}{a}$ ohnehin nicht bis auf $\frac{1}{55}\,\Delta$ sicher bleibt. Und weil für $a > 0$ dieser Fehler immer geringer werden muß, ie gröſſer a wird, so erhellet, daß man mit völliger Sicherheit allgemein die Formel annehmen kann

$$\Delta = 0{,}785 \cdot \left(2\sqrt{\frac{hg}{a}}\right) \cdot \tfrac{4}{3}r \cdot \left((a + 2r)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)$$

oder

$$\Delta = 2{,}094 \cdot r \left(\sqrt{\frac{hg}{a}}\right) \cdot \left((a + 2r)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right)$$

Belidorn hat es ungemein viele Mühe und Rechnungen gekoſtet, eine Formel zu finden, die der Wahrheit nur nahe käme (a. a. O. §. 555 bis 561.) daß ſich auf die hier gewieſene Art, ſo leicht eine ſehr geſchmeidige und der Wahrheit ſo nahe kommende Formel finden lieſe, iſt ihm nicht beigefallen. Er bringt noch §. 562 ein Exempel bei, wo er $r = 1$ Fuß, und $a = 10$ F. ſetzt. Das gäbe hier nach meiner Formel, wenn ich, wie B. thut, $h = a$ ſetze,

$$\begin{aligned}\Delta &= 2{,}094 \cdot 1 \cdot \sqrt{15{,}625} \cdot (12\sqrt{12} - 10\sqrt{10}) \\ &= 2{,}094 \cdot 1 \cdot (164{,}316 - 125) \\ &= 2{,}094 \cdot 39{,}316 \\ &= 82{,}327 \text{ C. Fuß.}\end{aligned}$$

Aber B. ſetzt nur $g = 15$ Fuß; um alſo meine Rechnung beſſer mit der Belidorſchen vergleichen zu können, ſetze man gleichfalls $g = 15$, das giebt

$$\begin{aligned}\Delta &= 2{,}094 \cdot (160{,}932 - 122{,}470) \\ &= 2{,}094 \cdot 38{,}462 \\ &= 80{,}539 \text{ C. F.}\end{aligned}$$

Statt deſſen findet B. nach ſeiner von der hier gegebenen ganz verſchiedenen Formel 80 C. F. 9 C. Z. 7 C. lin. womit alſo meine Rechnung ſehr wohl

wohl übereinstimmt. Man hat daher das mühsame Verfahren 207 gar nicht nöthig, da man sich mit gehöriger Ueberlegung, auch selbst bei Kreisabschnitten, eines dem hier gewiesenen ähnlichen Verfahrens bedienen kann.

§. 123. (K. §. 217.)

Ich gestehe, daß es mir immer unbegreiflich gewesen ist, wie man das Reiben beim Wasser als so eine beträchtliche Hindernis ansehen könne. Da Wasser sich nicht wie ein fester Körper fortbewegt, sondern iedes Theilchen seine eigene Bewegung hat, so könnte, wenn man auch an ein Reiben gedenken wollte, diese Hindernis doch offenbar nur denen zunächst an dem Rand der Röhre, wodurch das Wasser laufen muß, liegenden Wassertheilgen im Weg sein, und zwar nur so vielen Wassertheilgen, als erfodert werden, nur die Rauigkeiten der Wand auszufüllen, und die Friktion würde also immer ein Unding bleiben. Ich will noch folgendes hinzusetzen. Ist es wahr, daß iede solche Wasserscheibe wie ab, cd eine ihrem Gewicht gemäße Friktion am Umfang der Röhre leidet, (fig. 25.) so muß die gesammte Friktion, welche das Wasser in der Röhre leidet, desto gröſſer werden, ie länger die Röhre ist, wodurch es fließt. Ist nun CB ein mit Wasser gefülltes Gefäß mit einer horizontalen Röhre BA, so mag man BA so groß man will nehmen, der horizontale Druck des Wassers bleibt immer einerlei, aber die Friktion müßte, wenn sie vorhanden wäre, mit BA wachsen, und man müßte also BA so groß nehmen können, daß die Friktion endlich dem horizontalen Druck gleich würde, mithin das Wasser in der Röhre **wegen der Friktion hängen bliebe**, das doch Niemand bisher geglaubt hat. Ich finde auch, daß ich nicht der Einzige bin, der das Reiben beim Wasser für ein Unding hält. Hr. **Silberschlag**, ein Mann, dem es in der glücklichen Verbindung der Theorie mit praktischen Kenntnissen Wenige zuvorthun, vielleicht Wenige beikommen, urtheilt in seiner **Hydrotechnik** II. Th. §. 565. darüber ebenso, und weil er noch einige Gründe, die ich nicht erwähnt habe, anführt, so will ich den angeführten §. hersetzen.

„Endlich gelange ich zu der Lehre von der Friktion des Wassers, von „welcher ich diesen Augenblick nicht weis, was ich davon anders melden könnte, „als daß ich sie bisher für ein Ding gehalten, das sich nicht recht nennen und „gar nicht messen läßt. Ich besorge immer, daß es mit der Wasserfriktion „dieselbe Bewandnis habe, wie mit der Maschinenfriktion in der Mechanik. „Vor diesem, wenn es mit der Wirkung einer Maschine nicht recht fort wollte, „warf der Erfinder die letzte Schuld auf die Friktion, für deren Gröſſe Niemand

„mand stehen könne. Man entdeckte endlich die Grösse dieses bisherigen me„chanischen Ungeheures, und zugleich die Regeln, nach welchen man sich desselben bemächtigen müsse, da verschwanden die Klagen über den Widerstand der „Reibung auf einmal, und man begriff, daß die Schuld der vereitelten Hof„nung, an dem Mangel der Einsicht in die Bewegungsgesetze lebendiger Kräfte „gelegen, und nicht an der Friktion. Ich vermuthe, die Wasserfriktion dürfte sich „am Ende ganz und gar in ein wäßrichtes Unding verwandeln. Wasser soll „frottiren, das gutwillig alle Gestalten aller Körper annimmt! Wasser soll „zähe sein und den Strahl einer Fontaine oder den Lauf eines Canals aufhalten, „das so wenig zusammenhängt, daß es kaum einen kleinen Tropfen hangend er„halten kann! Es frottire, es ziehe an und sei zähe; so werden gleichwohl diese „Kräfte nichts merkliches dazu beigetragen haben, daß sich zwischen Rechnung „und Versuch eine so sichtbare Ungleichheit immer findet. Und wie, wenn man „in einem Canale lieber einen Streifen, dessen Breite den Durchmesser eines „Tropfens betrüge, absonderte und wegwürfe, so wüßte ich vollends gar nicht, „wo die übrige Friktion herkommen sollte. Und kurz, ich gebe weder Friktion „noch Zähigkeit des Wassers zu, wenn man daraus ein so gar merkliches „Hindernis der Richtigkeit des Calculs herleiten will. Das unschuldige Was„ser! Eben ietzt bringt man mir ein Springrohr von einer 50 Fus hochspie„lenden Fontaine, und ohnerachtet das Wasser bisher schon viele Jahre aus „diesem Rohre gesprungen, und ohnerachtet dieses Rohr von Blei ist, auch ohn„erachtet das Wasser, so diese Fontaine bedienet, unrein und sandigt genug ist, „so bemerke ich doch nicht das geringste Ausschleifen des Rohrs, welches noth„wendig sichtbar genug sein würde, wenn die Friktion im Rohre Schuld hätte, „daß die Fontaine 15 Fus niedriger springt, als sie springen sollte. Wie? „Läugne ich etwa die Widerspänstigkeit dieses Elements, das so sehr unsern „Rechnungen und der Genauigkeit unserer Versuche sich widersetzt? Ganz „und gar nicht. Ich meine nur, daß diese Verschiedenheit weder von dem Rei„ben noch von der Zähigkeit des Wassers, sondern theils von dem Widerstande „der Luft, der sich sogar nach dem Barometer richtet, theils von unrichtigen „Voraussetzungen bei der Berechnung, die in Ansehung der Methode noch so „richtig sein mag, theils von der Ungeschicklichkeit der Hand bei denen Versu„chen herrühre. Und wenn man Gründe wissen will, warum ich nicht glaube, „daß iemals ein Calcul haarscharf mit der Bewegung eines Strohms zutreffen „könne, so sehe man die Canäle selbst an, wie sie aussehen ꝛc."

§. 124. (K. §. 219.)

Dieser Abgang läßt sich gar nicht der Friktion zuschreiben, noch weniger aber als eine Maasregel zur Berechnung bei andern Fällen gebrauchen. Bei Mariottes Versuch, mußte die Geschwindigkeit des aus der Oefnung hervorspringenden Wassers sehr groß, und daher auch der Widerstand der Luft ziemlich beträchtlich sein; ausserdem kommt nicht die ganze Mündung in Betracht, sondern nur ein gewisser Theil von ihr (K. 142.) so daß wirklich der Abgang von dem, was die Rechnung giebt, gröſſer als $\frac{1}{50}$ zu vermuthen gewesen wäre, wenn nicht die Röhre, die Mariotte an seinem Gefäß hatte, die Zusammenziehung des Strahls wieder vermindert hätte. Die Betrachtung des Reibens, (wovon ich ohnehin nicht sehe, warum man sich solches blos am Rand der Mündung gedenkt,) ist also dabei gar nicht nöthig. Daß man aber auch aus diesem Abgang bei Mariottes Versuch, gar nicht auf andere Fälle zu schlieſen berechtiget ist, erhellet aus der Art des Versuchs selbst. Der Widerstand der Luft ändert sich mit der Geschwindigkeit des hervorspringenden Wassers und verhält sich wie deren Quadrat. Aber diese Geschwindigkeit selbst richtet sich nach der Höhe des Wassers. Man weis auch aus der Erfahrung daß der Satz (142.) von sehr grossen Oefnungen z. B. solchen, die durch Aufziehung grosser Schuzbreter bei Mühlgräben entstehen, gar nicht gilt, und daß bei solchen, zumal wenn das Wasser gar nicht, oder doch nur wenige Fuse über dem obern Rand der Oefnung steht, die nach der Voraussezung, daß $\frac{h}{a} = 1$ sei, berechnete Wassermenge, gar keinen beträchtlichen Abgang leidet, oder mit der wirklichen, für einerlei gehalten werden kann, denn der Widerstand der Luft wirkt doch mehr auf die Bahn des hervorschiesenden Wassers, als auf die Menge des Ausgusses. Anwendungen bringe ich unten bei (§. 357.)

§. 125. (K. §. 220. u. 221.)

s. die Erinnerung zu §. 219.

§. 126. (K. §. 222.)

das Reiben bei flüßigen Körpern ꝛc. Ich glaube, die Hauptschwierigkeit wird allemal die bleiben, eine allgemeine zur Ausübung hinreichend sichere Formel, für die Zusammenziehung des Strahls (142.) anzugeben. Was es mit dieser Zusammenziehung für Bewandnis habe, stelle ich mir so vor. Für einen sehr langsam fortgehenden Strahl, kann auch diese Zusammenziehung nur sehr wenig betragen und kann unmerklich werden; er wird noch desto geringer

ie

ie gröſſer der Querſchnitt des Strahls oder die Oefnung iſt. Wird die Geſchwindigkeit gröſſer, ſo wird dieſe Zuſammenziehung merklicher, und wieder deſto merklicher, ie kleiner bei eben der Geſchwindigkeit die Oefnung iſt. Je gröſſer aber die Oefnung iſt, deſto geringer wird die Zuſammenziehung, und ſie kann bei einer ſehr groſſen Oefnung wieder unmerklich werden, wenn gleich die Geſchwindigkeit ſehr groß iſt, wie (219. gegen das Ende.) Etwas brauchbares hierüber anzugeben, müßte man eine Reihe von ſorgfältig angeſtellten Verſuchen zuſammennehmen, und daraus etwa vermittelſt des Interpolirens (ſ. die Erl. der An. d. Un. 2ter B. im Anf.) eine Formel ſuchen, nach der ſich in der Ausübung rechnen lieſe.

Er erinnert mit Recht ꝛc. Wenn es nämlich mit der Frikeion ſeine Richtigkeit hätte. Ob Bel. wirklich Recht hat, wird darauf ankommen, ob die Zuſammenziehung des Strahls beim Kreis geringer iſt, als bei andern Figuren, wie ich doch nicht vermuthe, weil ich glaube, daß ſolche blos von der Gröſſe der Oefnung und der Geſchwindigkeit des durchflieſenden Waſſers abhängt.

§. 127. (K. §. 223.)

Daß das Reiben an den Rändern ꝛc. ſ. die vorhergehenden Erinnerungen. Ich glaube, daß dieſer Umſtand gleichfalls von der Zuſammenziehung des Strahls herrühren kann. Es wird nämlich ſolcher dadurch in ſeiner Richtung geſtöhrt, und ſo gebeugt, daß die Theilgen, die ſonſten parallel neben einander hergehen würden, gegen einander zu fahren müſſen, und dadurch einander in ihrer Bewegung in etwas hinderlich fallen. Da nun bei einer weitern Oefnung die Zuſammenziehung des Strahls ohne Zweifel geringer iſt, als bei einer engern, ſo iſt auch dieſe Beugung bei jenem nicht ſo beträchtlich als bei dieſem, und nach der Erinnerung zu (222.) wird ſich dieſer Unterſchied deſto mehr zeigen, ie gröſſer die Waſſerhöhe iſt; die einzeln Waſſertheilgen werden alſo auch bei jener einander weniger hinderlich fallen, als bei dieſer.

§. 128. (K. §. 224.)

I. ſ. die Erl. zu 223.

§. 129. (K. §. 225.)

Von Niemanden bemerkt ſehe ꝛc. Sie ſcheint auch wirklich nur aus einem Verſehen vom Hrn. Hofr. bemerkt worden zu ſein. Der Druck der Atmoſphäre iſt nämlich nur auf G um etwas ſehr geringes gröſſer als auf C,

aber ie mehr der Strahl aus G in die Höhe steigt, desto geringer wird der Unterschied der beiden auf C und auf den Wasserstrahl druckenden Luftsäulen; und wenn der Strahl seine höchste Stelle erreicht hat, so darf die Höhe der auf den Strahl druckenden Luftsäule, nur von dieser Stelle an gerechnet werden; und nun wird der Unterschied der auf den Behälter und der auf den Strahl druckenden Luftsäulen so wenig betragen, daß er gar nicht in Rechnung zu bringen ist. So steigt z. B. der Wasserstrahl, der von einer Wasserhöhe von 84 Fusen herrührt, nach Mariottes Tafel etwa 69 Fus hoch. Der Unterschied der Höhen beider druckenden Luftsäulen ist also hier 84 — 69 = 15 F. und dieses beträgt nach dem, was am Ende dieses §. im Buch gelehrt wird, so viel als eine Wassersäule, deren Höhe $\frac{15}{1296} = 0,1296 = 0,0231$ Fus oder $3\frac{1}{3}$ Linie wäre. Wäre also sonst gar keine Hindernis vorhanden, so würde wegen dieses verschiedenen Drucks der Atmosphäre, das Wasser, das 84 Fuse hoch fällt, etwa nur auf 83,977 F. hoch wieder steigen, welches in der Ausübung wohl mit 84 Fus für einerlei gelten kann. Es wird also diese 6te Ursache, wie es mir vorkommt, mit Recht nicht in Betrachtung gezogen. Wie übrigens das Fallen des Queckſilbers mit den Höhen der Atmosphäre zusammenhängt, davon s. Hrn. Hof. Abhandl. vom Höhemessen durchs Barometer in seinen Anmerk. über die Markscheidekunst.

§. 130. (K. §. 226.)

Nur eine Höhe von 4443 Fus ꝛc. So gar richtig kann man aber dann doch wohl hieraus auf den Widerstand, den die Luft der Bewegung des Wasserstrahls entgegensetzt, nicht schliesen, wenn gleich noch am Ende dieses §. die für sich ganz richtige Erinnerung beigefügt wird, daß der Widerstand der Luft beim Wasser, noch viel beträchtlicher als beim Eisen sei. *) Der Widerstand der Luft wirkt ganz anders gegen die Kugel als gegen den Wasserstrahl. Die Kugel, die den Mörser verlassen hat, und nun in ihrer Bahn durch die Luft fliegt, bekommt nun weiter keine von den verlohrnen Kräften ersetzt, sie erhält keine neue Stöse weiter. Ganz anders verhält es sich mit dem Wasserstrahl. Indem ein Wassertheil bei G herausfährt, und nun sogleich wieder G verschlossen wird, widersteht ihm da die Luft eben so, als ob sie ihm an dieser Stelle mit einer Geschwindigkeit, die der Höhe CD. (fig. 26.) zugehörte, entgegen käme, und der Wassertheil kann daher

*) Wenn man sich nämlich eine gleich große und ebenso geschwind geworfene Wasserkugel statt der eisernen gedenkt, so würde der Widerstand der Luft gleich beim Ausfahren einen gröſsern partem quotam von der Gewalt der Wasserkugel als der eisernen betragen, also erstere mehr schwächen.

daher wirklich wegen der Luft nicht mit der Geschwindigkeit, die der Höhe CD zugehört, bei G hervorspringen. Ist nun der Wassertheil, der sich anfangs bei G befandt, bis an m aufgefahren, so ist da seine Geschwindigkeit und eben deswegen auch der Widerstand der Luft, schon geringer als bei G; mit der Geschwindigkeit die er bei m hat, wird er nun weiter in die Höhe fahren, aber immer von seiner Geschwindigkeit verliehren, bis solche bei N = o wird. Wird nun G wieder einen Augenblick geöfnet und gleich wieder verschlossen, so wird wieder ein Wassertheil in eben der Zeit bis m und dann weiter bis an die höchste Stelle N fahren. Läst man aber die Mündung bei G beständig offen, so steigt ieder Wassertheil m nicht blos mit der Geschwindigkeit, die er etwa haben würde, wenn er ganz allein und abgesondert, wie zuvor angenommen wurde, von G bis m gestiegen wäre; sondern durch den beständig fortströhmenden Strahl, bekommt immer ieder vorausgehende Wassertheil m, durch den nachfolgenden n neue Stöse, so daß der Wassertheil schon bei p sein kann, der zuvor in eben der Zeit erst bei m war, und auf solche Art kann der Strahl die Höhe GM erreichen, da der einzelne Wassertheil nur die Höhe GN erreichte. Schon dieserwegen muß der Widerstand der Luft eine Kugel weit beträchtlicher in ihrer Bewegung hindern, als einen in einem fortgehenden Wasserstrahl. Ausserdem gehören Wasserhöhen von einigen 100 Fusen schon unter die höchsten; der Versuch mit der Kugel aber, dessen hier gedacht wird, bezieht sich auf eine Höhe von 155,42 Fus, welches den Widerstand der Luft gar ungeheuer vergrössert. Also darf man in der Ausübung wirklich sogar beträchtliche Unterschiede zwischen CD und MG nicht befürchten, wie auch die gleichfolgenden Mariottschen Versuche ausweisen.

§. 131. (K. §. 234.)

Aus $h^2 \cdot D = H^2 \cdot a - H^2 \cdot h$ folgt

$$h^2 + \frac{H^2}{D} \cdot h = \frac{H^2}{D} \cdot a$$

$$\text{und } h^2 + \frac{H^2}{D} \cdot h + \frac{H^4}{4D^2} = \frac{H^2 \cdot a}{D} + \frac{H^4}{4D^2}$$

$$= H^2 \cdot \left(\frac{4aD + H^2}{4D^2}\right)$$

$$\text{also } h + \frac{H^2}{2D} = \frac{H \cdot \sqrt{(4aD + H^2)}}{2D}$$

$$\text{und } h = \frac{H \cdot (\sqrt{(4aD + H^2)} - H)}{2D}$$

wonach also im Buch ein Druckfehler zu korrigiren ist. Mariotte hat selbst hiernach eine Tafel berechnet, die ich herſetzen will.

Höhe des Waſſerſtrahls	die zugehörige Waſſerhöhe
5 Fuß	5 F. 1 Zoll oder 5 1/12 F.
10	10 4 10 1/3
15	15 9 15 3/4
20	20 16 21 1/3
25	25 25 27 1/12
30	30 36 33
35	35 49 39 1/12
40	40 64 45 1/3
45	45 81 51 3/4
50	50 100 58 1/3
55	55 121 65 1/12
60	60 144 72
65	65 169 79 1/12
70	70 196 86 1/3
75	75 225 93 3/4
80	80 256 101 1/3
85	85 289 109 1/12
90	90 324 117
95	95 361 125 1/12
100	100 400 133 1/3
105	105 441 141 3/4
110	110 484 150 1/3
115	115 529 159 1/12
120	120 576 168

Nur

Nur erinnere ich noch, daß bei sehr beträchtlichen Höhen die beiden Sätze, die M. als gleichgültig ansieht, doch Resultate geben, die wirklich nicht für einerlei gehalten werden dürfen. Man setze z. B. A = 61, H = 60, und a = 2016 Zoll (oder 168 Fus.) so findet man nach II. im Buch

$$h = 30 \cdot (2\sqrt{(900 + 2016)} - 60)$$
$$= 30 \cdot (2 \cdot 54 - 60)$$
$$= 30 \cdot 48 = 1440 \text{ Zoll}$$
$$= 120 \text{ F. wie die Tafel giebt.}$$

Aber nach M. Versuch sollte man eigentlich A = 60, H = 59 und D wie zuvor = 1 setzen, und das gäbe

$$h = \frac{59 \cdot (\sqrt{(59^2 + 4 \cdot 2016)} - 59)}{2}$$

$$= \frac{59 \cdot (\sqrt{11545} - 59)}{2}$$

$$= \frac{59 \cdot 48{,}4}{2} = 1427{,}8 \text{ Zoll}$$

also um 12,2 Zoll niedriger als zuvor, und so sind die sämmtlichen Mariotte'schen Zahlen in vorgesetzter Tafel seinem Versuch nicht völlig gemäß, sondern um was weniges zu groß.

§. 132. (K. §. 247.)

der Höhe $u - ((1-m) \cdot PI + BQ) \cdot \text{Cos. } \beta$ ꝛc. Nämlich der Höhe $(AI - PI + m \cdot PI) \cdot \text{Cos. } \beta + AB \cdot \text{sin } \beta - BQ \cdot \text{Cos } \beta = AI \cdot \text{Cos } \beta + AB \cdot \text{sin } \beta - (PI - m \cdot PI) \cdot \text{Cos } \beta = BQ \cdot \text{Cos. } \beta = u - ((1 - m) \cdot PI + BQ \cdot \text{Cos. } \beta)$

§. 133. (K. §. 248.)

Es ist $\int - (\sqrt{\text{Cos } \beta}) \cdot \left(\frac{u}{\text{Cos } \beta} - x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot - dx =$

Const $- \frac{2}{3} \cdot \text{Cos } \beta^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{u}{\text{Cos } \beta} - x\right)^{\frac{3}{2}}$; dieses soll für $x = 0$ verschwinden, also

$0 =$

$$o = \text{Conſt} - \tfrac{2}{3} \cdot \text{Cof}\beta^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{u}{\text{Cof}\,\beta}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}}{\text{Cof}\,\beta}$$

und nun das Integral =

$$\frac{\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}}{\text{Cof}\,\beta} - \tfrac{2}{3} \cdot \text{Cof}\beta^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{u}{\text{Cof}\beta} - x\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}}}{\text{Cof}\,\beta} \tfrac{2}{3} \text{Cof}\beta^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{u - x \cdot \text{Cof}\,\beta}{\text{Cof}\,\beta}\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\left(u^{\frac{3}{2}} - (u - x \cdot \text{Cof}\,\beta)^{\frac{3}{2}}\right) \cdot}{\text{Cof}\,\beta}$$

§. 134. (K. §. 249.)

Mit $2\sqrt{g}$ multiplicirt ꝛc. Eigentlich mit $2\sqrt{mg}$. Es wird aber vorausgeſetzt, es ſei $m = 1$, welches der Erinnerung (Erl. 219. gegen das Ende) gemäß iſt, und ſo bezieht ſich die ſo berechnete Waſſermenge, auf den Durchfluß durch das Rechteck, deſſen Höhe BE die Breite aber ein Fus iſt, wenn alles übrige in Fuſen ausgedruckt wird. Es verſteht ſich, daß man ſich dieſes Rechteck ſo geſtellt vorſtellen muß, daß die Richtung des durchflieſenden Waſſers auf ſeine Ebene ſenkrecht iſt.

§. 135. (K. §. 266.)

Ich dächte, man könnte ꝛc. Hr. Hofr. **Karſten** (Hydraul. §. 81.) macht hiergegen gegründete Erinnerungen. Indeſſen lieſe ſich doch wohl dieſe Begebenheit auf eine ähnliche Art begreiflich machen.

ABCD (fig. 27.) ſei ein vertikales mit der Richtung des fortlaufenden Waſſers gleichlaufendes Rectangel, wo AC in des Waſſers Oberfläche, BD im Boden liegt. Gedenkt man ſich AB verſchloſſen, und öfnet nun ſolches auf einmal, ſo wird das vor AB ſtehende Waſſer längſt der Fläche ABCD hinabſchieſen. Unten von B nach D ſchieſt es mit der Geſchwindigkeit, die der Höhe BA zugehört, von E nach F mit der Geſchwindigkeit die der Höhe AE zugehört u. ſ. w. So iſt demnach das obere Waſſer in Strieſen EF wirklich noch nicht

nicht in F, wenn das vom Striefen BD schon in D ist, sondern etwa erst in G. u. s. w. Es gelangt indessen beim Fortfliesen doch noch in F, nur später, so daß vom Striefen BD alsdann schon in H ist u. s. w. Aber das in der Oberfläche bei A befindliche Wasser könnte, nach dieser Art zu schliesen, weil seine Geschwindigkeit der Höhe o zugehört, niemals in CD ankommen. Und doch kommt es da an! Das liese sich nun schon hinreichend daraus erklären, daß es wirklich in der Natur gar nicht verstattet ist, sich ieden Wasserstriefen wie EF als eine geometrische Linie oder als Element des Rectangels BEFD zu gedenken, und sich so iede unendlich dünne Wasserscheibe für sich fortfliesend vorzustellen. Man kennt den Zusammenhang des Wassers, der Tropfen bildet, und kann daher sicher annehmen, daß ieder Striefen, wie EF aus lauter dergleichen an einander liegenden Tropfen bestehe; oder in der Natur ist ieder solcher Striefen EF, als ein horizontalliegender Cylinder oder Parallelepipedum anzusehen, dessen Querschnitte nur sehr gering wie bei kleinen Wassertropfen wären. Und so wäre es lächerlich, sich die Bewegung des obersten Striefens durch A erst dadurch schwierig zu machen, daß man sich solchen ohne alle Dicke gedächte. Auch in diesem obersten Striefen müssen sich gewiß lauter ganze, nur kleine Wassertröpfgen ungetrennt fortbewegen, und wenn man auf solche Art die oberste Wasserschichte nur 1 Scrupel dick in der Natur annähme, die nämlich zusammen mit gleicher Geschwindigkeit fortflöße, so hätte diese Schichte doch schon eine Geschwindigkeit; sie wäre nämlich

$$= 2\sqrt{\left(\frac{15,625}{1728}\right)} = 2\sqrt{0,0090}$$

$$= 2 \cdot 0,095 = 0,19$$

oder beinahe $= \frac{1}{5}$ Fus, und die oberste Schichte flösse also in 5 Sec. doch schon um einen Fus fort. Das Wasser in A würde also freilich sehr spät aber doch einmal in C anlangen, wenn auch C noch soweit von A wegwäre, und alsdann würde immer die horizontale Oberfläche AC ausgefüllt bleiben, nur würde es freilich in dieser Oberfläche sehr langsam fortfliesen. Und das ist, wie mich dünkt, nach der physischen Betrachtung des Wassers immer hinreichend, sich die Frage zu beantworten: Wie kann Wasser von A nach C kommen? Ich behaupte aber dennoch nicht, daß dieses Fortfliesen in AC nur wegen der Dicke der Wasserscheiben erfolge, sondern glaube vielmehr, daß dieses Fortfliesen der Natur der Bewegung vollkommen gemäß sei, auch wenn wirklich iede unendlich dünne Wasserscheibe EF für sich ihre eigene Bewegung hätte. Es würde nämlich solchergestalt doch immer iede höhere Schichte

auf der nächstniedrigen ruhen und daher immer die niedrigere, indem sie fortgeht, der auf ihr ruhenden höhern, etwas von ihrer Bewegung mittheilen, solche beschleunigen, weil doch die Wasserelemente an einander liegen und in einander greifen müssen, so klein sie auch sein mögen, und solchergestalt also die Wassertheilgen durch Stöse beständig in einander wirken müssen, so daß die Bewegung der untersten Schichte ihren Einfluß bis auf die oberste hat.

Soviel bleibt indessen richtig, daß die Lehre von Bewegung der Flüsse noch viel zu wenig bearbeitet und ihre Theorie noch viel zu unvollkommen, zusehr durch allerlei angenommene Voraussetzungen eingeschränkt ist, als daß sie brauchbar genug wäre, in der Ausübung Rechnungen darnach zu führen. s. die bei Erl. zu 217 angef. Stelle aus Hrn. Silberschlags Hydrotechnik, und Hr. Hofr. Karsten Vorr. zu seiner Preisschrift über die Anordnung der Feuerspritzen. Daß sich bei Flüssen die Geschwindigkeit schlechterdings nicht nach 246 berechnen läßt, lehrt die Erfahrung. Die Menge von Ungleichheiten auf dem Boden, häufige Inseln, Krümmungen der Ufer u. s. w. unterbrechen beständig die Bewegung. Man bedenke selbst den Ort des Ausflusses, wo allemal der letzte vertikale Querschnitt eines Flusses, einen sehr beträchtlichen Widerstand findet und sehr in seinem Lauf gehemmt wird, und welches in die Geschwindigkeit des ganzen Flusses einen sehr grossen Einfluß hat; so wird begreiflich, wie ein Fluß oft in Stellen, die viele Meilen von einander entfernt sind, doch einerlei Geschwindigkeit haben kann. Selbst die in jeder Sec. durch jeden Querschnitt eines horizontalen Kanals fliesende Wassermenge, läßt sich nicht wohl nach (252.) $= 2(\sqrt{fg}) \cdot bc$ setzen, oder f müßte anders bestimmt werden, als nach der hier vorgetragenen Theorie, da z. B. das nahe über dem Boden des Flusses herfliesende Wasser, wegen der vielen ihm im Weg stehenden Hindernisse, gewiß die Geschwindigkeit nicht haben kann, die das vom Boden etwas weiter entfernte hat, womit auch (K. 270. I. und V.) übereinstimmt. Ueberhaupt denke ich nicht, daß z. B. (im Buch fig. 20.) des Querschnittes bei T mittlere Geschwindigkeit, bei grossen Flüssen allemal gröſſer sein wird, als bei Y, daferne des Bodens Neigung, wie gewöhnlich nur ganz gering ist.

§. 136. (K. §. 270.)

I. Auf der Oberfläche ꝛc. oder eigentlich des nahe bei der Oberfläche befindlichen Wassers.

§. 137. (K. §. 277.)

Die Richtigkeit dieser Voraussetzung zu übersehen, darf man nur überlegen, wenn ein Fluß n mal so geschwind gegen eine Ebene ströhmt, als ein anderer

derer, daß alsdann in eben der Zeit, gegen eben die Ebene, nothwendig auch n mal soviel Wassertheilgen anstosen müssen.

Also stosen in dem n mal geschwindern Fluß n mal soviel Wassertheilgen und iedes Wassertheilgen mit n mal soviel Geschwindigkeit gegen die Ebene als im andern Fluß, und die Gewalt, welche die nämliche Ebene in einerlei Zeit in ienem Fluß leidet, ist also n^2 mal so groß, als in diesem. Setzte man dem langsamern Fluß eine n mal so große Ebene, als dem n mal geschwindern entgegen, so würden in einerlei Zeit gegen beide Ebenen gleichviel Wassertheilgen anstosen, aber im erstern Fluß nur $\frac{1}{n}$ so geschwind als im letztern, und die nfache Ebene würde daher dennoch nur $\frac{1}{n}$ soviel Gewalt als die 1fache im n mal geschwindern Strohm, und einerlei Ebene würde also von einem Fluß nur $\frac{1}{n^2}$ soviel Gewalt leiden, als vom n mal geschwindern.

§. 138. (K. §. 281.)

Die Stelle, worin die AB von der Oberfläche des Wassers geschnitten wird, will ich mit M bezeichnen, so ist $BM = AB - AM$, folglich die vertikale Tiefe der Stelle, für die man des Wassers Geschwindigkeit erfährt, unter des Wassers Oberfläche $= (AB - AM) \cdot Col\alpha$, wo AB gegeben ist, und AM sich leicht messen läßt. Auf eben die Art, wie man nach dieser Methode im Stand ist, die Geschwindigkeit des Wassers am Boden zu finden, und noch weit leichter, geht es an, nach eben dieser Methode die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche zu erfahren, ohne daß man nöthig hätte, solche nach (270.) zu suchen. Ueberhaupt muß man, die Geschwindigkeit des Flusses für iede bestimmte Tiefe zu erfahren, den Faden mit der dran hangenden Masse anfangs nur soweit hinablassen, daß die Masse, wenn sie vertikal hienge, doch nur etwa die verlangte Tiefe erreichte; die Masse wird alsdann diese Tiefe nicht wirklich erreichen, sondern etwas weiter fort und dadurch in eine höhere Schichte getrieben, und nun läßt man den Faden bei A allmählig etwas nach, bis während diesem Nachlassen die Masse endlich in die verlangte Tiefe des Flusses nach und nach sinkt.

§. 139. (K. §. 282.)

Es ist aber richtiger ꝛc. der Hr. Hofr. scheint hiermit anzeigen zu wollen, daß in Gulielminis Gedanken doch noch etwas Richtiges liege. Wenigstens

nigstens denke ich, Gul. hat wirklich richtig gedacht, und nur eine unrichtige Anwendung gemacht. Die Kräfte der einzelen Wassertheilgen stehen wohl in der Verhältnis der Geschwindigkeiten, wie ich wenigstens aus denen Schlüssen Erl. zu 277. folgern zu dürfen glaube. Aber in dem n mal geschwindern Fluß stoßen gegen einerlei Ebene in einerlei Zeit nicht eben soviele Wassertheilgen, als in dem Fluß, der nur die einfache Geschwindigkeit hat, sondern n mal so viele. Wenn also gleich G. darin Recht haben kann, daß die Kräfte der einzelen Wassertheilgen ihrer Geschwindigkeit proportional seien, so folgt doch daraus nur, daß die Verhältnis der Stöße, welche einerlei Ebene in beiden Flüssen von einerlei Menge Wassertheilgen leidet, mit der Verhältnis der Geschwindigkeit einerlei ist, und wenn G. den Umstand, daß allemal eben die Ebene in eben der Zeit im n mal geschwindern Fluß auch von n mal so viel Wassertheilgen gestoßen wird, nicht übersehen hätte, so würde er seinen Satz, der von den Kräften der einzelen Wassertheilgen richtig sein mag, nicht unmittelbar von der Verhältnis der Kräfte F : K selbst haben brauchen können.

§. 140. (K. §. 283.)

Er folgt unten ꝛc. Es wird aber unten in der Erl. zu der dortigen Stelle gezeigt werden, daß der dort gegebene Beweis von der Elviusschen Formel unrichtig ist, und daß aus den dortigen Schlüssen, die gewiß gar nicht des Elvius Gedanken gemäß sind, nur von ohngefähr diese Formel folgt.

§. 141. (K. §. 284.)

bestätigt hier die Erfahrung ꝛc. Ich glaube nicht, daß der Elviussche Versuch so schlechthin seine Formel bestätigt. So viel ist zu vermuthen, daß allemal das Wasser um die Mitte der Tiefe herum in einem Fluß schneller fließt, als das nahe an der Oberfläche befindliche (270. I. am E.) Nun ist in dem Elviusschen Versuch nicht angegeben, wie tief die Kugel unter dem Wasserspiegel sich befandte; weil es aber der Beschreibung nach nur ein kleiner Fluß war, und die Länge des Pendels AD doch fast 3 Fuse betrug, so ist zu vermuthen, daß die Kugel wirklich nicht viel ausser der Mitte der Tiefe wird gewesen sein, wenigstens doch nicht gar nahe an der Oberfläche. Der Span aber hat noch über der Oberfläche des Wassers hervorragen müssen, und bekam also höchstens die Geschwindigkeit des nahe an der Oberfläche fliesenden Wassers. Und dennoch gab der Versuch die Geschwindigkeit des Spans, um was weniges grösser, als die Rechnung die Geschwindigkeit der in der Tiefe der Kugel fliesenden Wasserschichte. Und da letztere wirklich merklich grösser

hätte

hätte sein können, so läßt sich diese Erfahrung mit dem, was die Formel giebt, gar nicht vergleichen. Ist aber die Geschwindigkeit in der Tiefe, mit der Geschwindigkeit an der Oberfläche gleich gewesen, so dient allerdings der Versuch zur Bestätigung der Formel. Elvius hätte also bestimmter reden sollen.

§. 142. (K. §. 285.)

mache 6 Fus ꝛc. Es versteht sich hier und in ähnlichen Fällen allemal die mittlere Geschwindigkeit.

§. 143. (K. §. 290.)

krümmte ꝛc. Diesem liese sich leicht dadurch abhelfen, daß man sich statt des Draths an einander gefügter unbeugsamer Stangen bediente, und dann an iedem der beiden Haken am Halbkreise kleine Walzgen anbrächte, die auf den Stangen gerne fortliefen.

§. 144. (K. §. 291.)

so kann doch kein Tropfen ꝛc. Wo man in den Fluß eine Ebene dem Strohm so entgegensetzt, daß solche über des Wassers Oberfläche hervorragt, muß sich allemal der Wasserspiegel an dieser Ebene etwas erheben, wegen des anspielenden Wassers. Hat man also die Oefnung der Oberfläche des Wassers gleich gestellt, und wahrgenommen, daß kein Tropfen in den Kasten hineingeloffen ist, so ist das ein Beweis, daß die Oefnung nicht dem eigentlichen natürlichen Wasserspiegel, sondern dem aufgeschwellten, ist gleichgesetzt worden, und so ist es natürlicher, daß kein Wasser in die Oefnung hat laufen können, weil die Stelle, über die Wasser laufen soll, niedriger liegen muß, als die, von der es herkommt. Ueberhaupt aber sehe ich nicht, wie hier in der Ausübung eine solche Genauigkeit möglich wäre, als erfodert würde, um den Satz (266.) daraus zu beweisen, und mich dünkt, was Hr. Hofr. in der mehr erwähnten lehrreichen Vorrede sagt: „Mein Lehrer, Hausen, fragte uns, ob der Heber fliesen sollte oder nicht? und machte es, wie wir es verlangten" das liese sich eben so von dem Einfliesen des Wassers in diese Oefnung sagen.

§. 145. (K. §. 293 - 296.)

Kurz zu übersehen, daß MK kleiner sein wird, als die der wirklichen Geschwindigkeit des Wassers zugehörige Höhe, darf man nur bedenken, daß nicht etwa das Wasser blos von M bis K hinaufgetrieben, sondern das zwischen G und M befindliche mit in Bewegung gesetzt werden muß, wobei ein Theil von

des anstoßenden Wassers Kraft verlohren geht. Ausserdem ändert die nach unten zu aus einander gehende trichterförmige Oefnung DEFG im Stand des Gleichgewichts nichts. Aber im Stand der Bewegung verhält es sich anders. Ich habe oben erinnert, daß diese Gestalt die Bewegung des bei FG auslaufenden Wassers beschleunigt. Man gedenke sich also die untere Oefnung anfangs verschlossen, und fülle die Röhre bis an K mit Wasser; nunmehr öfne man sie wieder bei FG, so wird das Wasser schnell herabsinken, so daß seine Oberfläche, wenn solche in M anlangt, da eine grössere Geschwindigkeit hat, als die der Höhe DM oder der Höhe des umstehenden Wassers zugehört, und es wird also anfangs unter M herabsinken, bis an einen Punkt, den ich mit N bezeichnen will, daferne nämlich das umstehende Wasser ruhig ist. Ist nun solches in Bewegung und soll durch seinen Stos das Wasser in die Röhre bis an K hinauftreiben, so sieht man, daß schon dieses Umstandes wegen die der Geschwindigkeit des Wassers zugehörige Höhe, nicht MK, sondern (NM + MK) sein muß.

§. 146. (K. §. 302.)

XIII. Bei kleinen Flüssen leisten hierzu die bei den Mühlen vorgerichtete Wehre und Gerinne mit den Schußbretern den besten Gebrauch. Die Höhe des Wasserspiegels über die unter dem Schußbret liegende Schwelle, läßt sich gar leicht und bequem messen, und dann die Wassermenge, die der Bach iede Sec. auswirft, nach (187. oder 193. II.) bald finden. Auch ist es bei dergleichen grossen Oefnungen, hinter denen das Wasser auch ohne weitere Hinderniße frei hinabfallen kann, gar wohl verstattet, wie ich schon oben bemerkt habe, $\frac{h}{a}$ oder $m = 1$ zu setzen, um so mehr, weil nicht $\frac{h}{a} \cdot g$ selbst, sondern nur $\sqrt{\frac{h}{a}g}$ in die Rechnung kommt. Ich habe mich auch selbst mehrmalen bei Fällen, wo es nöthig ware, die Wassermenge zu wissen, die ein Bach iede Sec. gäbe, dieser Art bedient, und werde unten dergleichen Anwendungen beibringen. Hat man auf solche Art die Wassermenge für iede Sec. die ich M nennen will, gefunden, so läßt sich für ieden Querschnitt die mittlere Geschwindigkeit des durchfliesenden Wassers blos dadurch finden, daß man seine Fläche berechnet, und damit die M dividirt.

XIIII. Wie sich Anwendungen hiervon auf Salzbrunnen machen lassen, wird gleichfalls unten vorkommen.

§. 147.

§. 147. (K. §. 304.)

VIII. *der in Absicht auf das Wasser, das sich von S nach L zu befindet* ꝛc. Ich dächte nicht, daß dieses verstattet wäre. Man müßte vielmehr den Punkt L in der Horizontallinie IL um soviel weiter V zurücksetzen, als die Entfernung des Querschnitts durch S, von dem durch A beträgt, und dann fällt in die Augen, daß die beiden hier angenommenen Verhältniße wegfallen. Will man aber eben den Punkt L beibehalten, so müßte man erst wie mich dünkt, die Frage entscheiden, ob S (d. h. die Stelle, für die der Querschnitt in Absicht des bis an LK befindlichen Wassers ebenso für den ersten angesehen werden kann, wie der Querschnitt AY in Ansehung des von A bis an LK befindlichen der erste ist genennt worden) in der geraden Linie durch L und A angenommen werden darf? Dieses ist im Buch stillschweigend angenommen worden, und darauf gründen sich dann beide angenommene Verhältnisse. Offenbar aber ist die eben erwähnte Frage von der Hauptfrage nicht viel verschieden, und muß wohl mit Nein beantwortet werden, wie auch selbst aus dem, was im Buch (304.) gesagt wird, folgt.

XIIII. Die Figur liese sich etwa vorstellen wie (fig. 28.). Ll sei die Oberfläche des Wassers, da noch alles in Ruhe ist, Kk der Boden, der in n eine Oefnung habe, die sich gegen Ll als unendlich klein ansehen läßt. Solange diese Oefnung verschloßen bleibt, ist Ll horizontal; sobald man sie aber öfnet, fällt das Wasser dadurch längst der Vertikallinie mo hinab, und nimmt die Gestalt LPTO, lpto an; die zu $w = nn = h = KL$ gehörige Horizontallinie Ll giebt nun die *eine* und die darauf senkrechte mo die *andere* Asymptote ab. Daraus erhellet, daß die Oberfläche des Wassers (dessen Abgang beständig ersetzt wird) schon von L, l, bis bei n hyperbolisch gestaltet ist, und wohl nicht als eine schiefe Ebene angesehen werden kann.

§. 148. (K. §. 312.)

der Höhe von 11 F 8 Z. ꝛc. Aber das stimmt gar nicht mit den Erinnerungen (270. I und V.) überein. Ueberhaupt ist das, was hier 312 bis an den zweeten Abschnitt vorkommt, ganz auf die von der Erfahrung hier sosehr abweichende Theorie gegründet, und daher die Unsicherheit dieser Sätze für die Ausübung zu offenbar, als daß sie sich zu wirklichen Anwendungen gebrauchen ließen.

die bekannten Bedeutungen ꝛc. Aber aus einem Versehen sind doch im Ex. V, U, mit U V; und v, u mit u, v verwechselt worden. Und

dann

dann sollte es auch nicht helfen: die gesuchte Höhe des Querschnitts $= Z - V$, sondern $U - Z$; es bleibt demohngeachtet die Gleichung im Buch richtig. Und man hat also

$$Z = \left(V^{\frac{3}{2}} + \frac{b}{B} \cdot (v^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{3}{2}})\right)^{\frac{2}{3}}$$

Die Rechnung wie im Buch geführt, sieht so aus:

$$Z^{\frac{3}{2}} = (31\sqrt{31}) + \tfrac{1}{7}\tfrac{3}{8}\tfrac{2}{0} \cdot \left((11\tfrac{3}{7}\sqrt{11\tfrac{3}{7}}) - \tfrac{3}{7}\sqrt{\tfrac{3}{7}}\right)^{*})$$

$$= 31 \cdot 5{,}567 + 0{,}183 \cdot (39{,}819 - 0{,}544)$$

$$= 172{,}577 + 7{,}186 = 179{,}763 \text{ und}$$

$$\text{l}Z^{\frac{3}{2}} = \tfrac{3}{2}\,\text{l}Z = \text{l}\,179{,}763;$$

$$\text{also} \quad \text{l}Z = \tfrac{2}{3}\,\text{l}\,179{,}763$$

$$= 1{,}5030 \ldots$$

$$\text{und} \quad Z = 31 \text{ Fus } 10\tfrac{1}{7} \text{ Zoll}$$

wo aber Z gar nicht, soviel ich sehe, die gehörige Bedeutung und Grösse hat. Und wenn man nun die Höhe des Querschnitts nach der Angabe im Buch $= Z - V$ setzt, so findet sich solcher $= 31$ F. $10\frac{1}{7}$ Zoll $- 1$ F. $= 30$ F. $10\frac{1}{7}$ Z. nicht 30 F. 20 Zoll wie im Buch steht.

Zur Prüfung der vorerwähnten Rechnung will ich nun die wirklich durchfliesenden Wassermengen vor und nach der Vereinigung einmal nach (249) berechnen.

I. Vor der Vereinigung

floß in ieder Sec. im grossen Fluß durch ieden Querschnitt eine Wassermenge

$$= B \cdot (2\sqrt{g}) \cdot \tfrac{2}{3}\left(U^{\frac{3}{2}} - V^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= 1520\,(\sqrt{g}) \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 171{,}577 = 260797{,}04 \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{g}$$

im kleinern aber

$$b \cdot (2\sqrt{g}) \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \left(u^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= 278 \cdot (\sqrt{g}) \cdot \tfrac{2}{3} \cdot 39{,}275 = 10918{,}45 \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{g}$$

also durch beide zusammen $=$

$$271715{,}45 \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{g}$$

II. Nach

*) Es ist nämlich im Buch ein Druckfehler zu verbessern.

II. Nach der Vereinigung

giebt sich die durch ieden Querschnitt des vereinigten Flußes fliesende Wassermenge so. Es ist nun nicht mehr V = 12 Zoll, sondern = 12 — $10\frac{1}{7}$ = 1,8 Z. = 0,15 Fus also nun die Wassermenge =

$$B \cdot (2\sqrt{g}) \cdot \tfrac{2}{3} \left(U^{\frac{3}{2}} - V^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$= 1520 \cdot \tfrac{2}{3} (\sqrt{g}) \cdot (31\sqrt{31} - 0,15 \cdot \sqrt{0,15})$$

$$= 1520 \cdot (172,577 - 0,5805) \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{g}$$

oder sehr nahe

$$= 1520 \cdot 172 \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{g} = 261440 \cdot \tfrac{2}{3}\sqrt{g}$$

So flösse also nach der Vereinigung, im vereinigten Fluß weniger Wasser durch, als in beiden Flüßen zusammen, vor der Vereinigung, welches nicht sein kann. Also zeigt sich, daß wirklich die Höhe des aufgeschwellten Flusses nicht richtig ist gefunden worden, wie auch zuvor schon zu erwarten ware. Ueberhaupt enthält das Exempel, wie mich dünkt *) was Unmögliches. Weil nämlich in der Formel für $Z^{\frac{3}{2}}$ nach den wahren Werthen $\frac{b}{B} \cdot \left(v^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{3}{2}} \right)$ eine gröſſere verneinte Größe ist, als $V^{\frac{3}{2}}$, so wird $Z^{\frac{3}{2}}$ verneint, folglich der Werth von Z wieder beiaht und $> V$, so daß die Höhe des aufgeschwellten Querschnitts $= U - Z < U - V$ oder kleiner als die Höhe des Querschnitts vor der Vereinigung wird, welches widersprechend ist. Die Gröſſen im Ex. müssen so gewählt werden, daß kein solcher Widerspruch draus erfolgt, und daß der angenommene Fall, also wirklich vorkommen kann. Ich gebe nicht den Fall für sich, daß sich zweene Flüße von den gegebenen Abmessungen mit einander vereinigen könnten, als unmöglich an; nur die Bedingung, wie sie nach der Vereinigung fortflieſen sollen, macht meiner wenigen Einsicht nach den Fall unmöglich; es soll nämlich die Geschwindigkeit nachher so groß, wie zuvor beim gröſſern Fluß bleiben, und dieses kann nicht sein, weil der Fluß bey der Vereinigung mehr als um einen Fus hoch schwellen muß, wenn beide noch unvereinigte Flüsse ungehindert fortflieſen und der neue Querschnitt bei der Vereinigung das aus beiden Flüssen durchflieſende Wasser alle soll

*) Ich gläube nicht, daß meine Schlüsse unrichtig sind — aber was ist leichter als Irren? Sollte ich also unwissend geirrt haben, so will ich um gütige Entschuldigung bitten.

soll fassen können. Man übersieht dieses leicht, wenn man für $U = 31$ F. die durchfliesende Wassermenge berechnet, die alsdann noch lange nicht $= 271715{,}45 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{g}$ wird. Also muß des Flußes Tiefe nothwendig beim vereinigten Fluß größer als U sein, und die Voraussetzung, daß die Geschwindigkeit unverändert bleiben soll, macht also die Auflösung des Exempels unmöglich. Ich will daher den Gebrauch der Formel durch ein anderes Exempel zu erläutern suchen.

Ein Fluß, der horizontal angenommen wird, ist 2000 F. breit, 30 F. tief, also $B = 2000$, $U = 32$, und V sei $= 2$ F.; ein anderer soll sich unter der genannten Bedingung mit ihm vereinigen; seine Breite ist 100 F. und Tiefe 6 Fus, also $b = 100$, $u = 6$, und v sei $= 1$ F. Wie hoch muß der vereinigte Fluß aufschwellen?

Man hat hier

$$Z^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} + \frac{100}{2000} \cdot (1 - 6 \cdot \sqrt{6})$$

$$= 2{,}828 - \frac{13{,}694}{20},$$

$$= 2{,}828 - 0{,}684$$

$$= 2{,}144;$$

demnach $\frac{3}{2} lZ = l\,2{,}144 = 0{,}3312248$

und $lZ = \frac{0{,}6624496}{3}$

$= 02208165$

folglich $Z = 1{,}66$

und nun die Höhe des vereinigten Flußes $= U - Z = 32 - 1{,}66 = 30{,}34$ F. oder 30 F. 4 Z. Er schwillt also nur um 4 Zoll hoch an. Und weil iede Schichte schon mit einer grössern Geschwindigkeit fortfliest, als die der dadurch vergrößerten Wasserhöhe zugehörige Geschwindigkeit ausmacht, so kann auf solche Art dieses Anschwellen die Geschwindigkeit von keiner Schichte des größern Flußes vermehren, sondern es bleibt solche beim vereinigten Fluß völlig wie zuvor beim größern allein.

Eigentlich hätte man sollen $u = o = U$ ꝛc. eigentlich $v = o = V$, weil nämlich der Fluß horizontal angenommen wurde. Aber nach dem, was

oben

oben ist erinnert worden, kann man doch in der Ausübung v, V, von dem nahe an der Oberfläche fliesenden Wasser gebrauchen, und daher solchen gar wohl gewisse Werthe geben. Setzte man wirklich $v = o = V$, so wäre U mit der Tiefe des größern Flußes einerlei, und weil der vereinigte Fluß, bei einerlei Breite, allemal anschwellen muß, so müßte da die Tiefe des vereinigten Flußes allemal $> u$ sein, und die Aufgabe, die eine unveränderte Geschwindigkeit voraussetzt, wäre also alsdann allemal ungereimt, oder es gäbe niemals ein Z, das der Aufgabe ein Genüge thäte.

§. 149. (K. §. 319.)

S. 257. widerspricht wohl dem angeführten Satz nicht ꝛc. Ich muß gestehen, daß ich mir vordem, ehe ich noch was von Hrn. Pauton wußte, selbst diese Einwendung mit der Pumpe gemacht hatte. Sie hat auch wirklich viel Scheinbares. Wenn Zweene mit zwo völlig gleichen Handpumpen Wasser in die Höhe arbeiten, so ist es allerdings richtig, daß der, der eine Zeitlang doppelt so geschwind pumpt als der Andere, nur doppelt so viel Kraft anwendet — gleichwohl muß er in solcher Zeit mit der doppelten Kraft nicht nur iedes Wassertheilgen doppelt so geschwind, sondern auch doppelt so viele Wassertheilgen als der Andere in Bewegung setzen, wozu doch nach 318. die 4fache Kraft nöthig zu sein scheint. Ich habe mir aber diesen Zweifel durch folgende Betrachtung gehoben. Wenn ein Mann eine z. B. 10 Fus lange vertikal stehende Wassersäule in einer gewißen Zeit um z. B. 25 Fus über ihre erste Stelle erhebt, und nun ein Andrer eine 20 Fus hohe, deren Querschnitte mit der vorigen einerlei sind, noch einmal so geschwind, eben diese Zeit über, von ihrer ersten Stelle erhebt, so hat dieser letztere so offenbar 4mal soviel zu thun oder 4mal soviel Kraft nöthig als der Erstere, daß auch P. nichts dagegen einwenden kann. Offenbar hat es mit Hebung dieser Wassersäule eine ganz andere Bewandnis, als mit dem Wasser, das durch die Pumpe gehoben wird. Im erstern Fall wird doppelt soviel Wasser doppelt so hoch gehoben, im letztern aber bei der Pumpe wird zwar auch bei der doppelten Geschwindigkeit, doppelt soviel Wasser gehoben, es geschehen doppelt so viel Hübe, aber bei iedem einzelen Hub wird das Wasser nicht auch doppelt, sondern nur eben so hoch als bei der einfachen Geschwindigkeit gehoben. Oder: es werden zwar bei der doppelten Geschwindigkeit, doppelt soviele Waßertheilgen, doppelt so geschwind bewegt, aber die Gewalt, die solchergestalt die Bewegung iedes einzeln Theilgens erfodert, entgeht auch dem Arbeiter wegen des geschwin-

dem Ausgußes doppelt so geschwind, er braucht zur Bewegung iedes einzelen Theilgens seine Kraft nur halb so lange als bei der einfachen Geschwindigkeit, welches sich bei den gedachten Wassersäulen anders verhielte. Also fällt in die Augen, daß iener Fall eigentlich zu (318), dieser aber mit der Pumpe gar nicht dahin gerechnet werden kann. Jener kommt völlig mit 318. überein, und dieser widerspricht ihm aus der angeführten Ursache so wenig, daß er ihn vielmehr gleichfalls bestätigt.

Wer zu zanken Lust hätte, könnte nun noch weiter einwenden, daß auf eben die Art die Wassertheilgen, welche gegen eine Fläche ströhmen, bei der doppelten Geschwindigkeit auch nur halb so lange gegen die Fläche wirkten, welches wirklich des P. Meinung sein muß, aber diese Einwendung gilt hier deswegen nicht, weil iedes Wassertheilgen durch einen Stos wirkt, der allemal auf einmal geschieht (s. höh. Mechan. S. 344. u. f.) Gleich nach der völligen Berührung ist auch die ganze Wirkung vollendet.

Um allen Zweideutigkeiten und Verwirrungen auszuweichen, die wirklich hierinnen dadurch entstehen, daß man die verschiedenen Fälle und das, was sie eigentlich verschieden macht, nicht gehörig von einander unterscheidet, will ich noch einen Fall erwähnen.

Man hat zweene gleiche Wasserbehälter mit Wasser angefüllt, aus beiden lauft das Wasser zu gleichen Oefnungen heraus, nur durch die eine doppelt so geschwind als durch die andere. Wie vielmal mehr wird das Wasser aus dem einen Behälter ausrichten, als das aus dem andern mit der halben Geschwindigkeit? In gleichen Zeiten des Auslaufens viermal soviel nach (318.) Jedes Theilgen übt seine ganze Wirkung aus. Aber im Ganzen dauert diese 4fache Wirkung doch nur halb solang, als bei dem andern Behälter die einfache. Wenn nämlich das Wasser aus dem einen Behälter bei der doppelten Geschwindigkeit ganz herausgeloffen ist, so ist das aus dem andern erst zur Hälfte heraus; es läuft aus solchem noch einmal solang als aus dem erstern, und wirkt auf solche Art in der doppelten Zeit $2 \cdot \frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{2}$ soviel als das geschwinder auslaufende. Hier, dünkt mich, fällt die Unrichtigkeit von des P. Satze offenbar in die Augen. Ihm zufolge müßte hier das Wasser aus dem einen Behälter in gleichen Zeiten des Auslaufens nur doppelt soviel ausrichten, als das aus dem andern, nun lauft aber das aus dem andern dagegen auch noch einmal solang, also müßte das Wasser aus beiden Behältern im Ganzen gleichviel ausrichten, das doch offenbar den gemeinsten Erfahrungen zuwider ist.

§. 150.

§. 150. (K. §. 327.)

I. Hier giebt sich alles ganz leicht, wenn man nur aus der Aehnlichkeit der Dreiecke schließt. Ich erinnere nur noch, daß s das Stück der krummen Linie A M bedeutet.

II. Die Normalkraft ist nämlich auf die Tangentialkraft senkrecht, also ihre Richtung bei M in der geraden Linie durch V und M, und die Stärke, womit sie auf M in der geraden Linie durch P und M wirkt, ist also

$$\frac{MP}{MV} \cdot N.$$ Es ist aber

$$MP : MV = MO : MN$$
$$= dx : ds$$
$$= 1 : \frac{ds}{dx}$$

folglich nach der letzten Gleichung in I.

$$= 1 : \sqrt{(1 + p^2)}$$

demnach $$\frac{MP}{MV} \cdot N = \frac{N}{\sqrt{(1 + p^2)}}$$

Ihre Wirkung auf M der Axe gleichlaufend ist

$$\frac{PV}{MV} \cdot N$$

und weil

$$PV : MV = NO : MN$$
$$= dy : ds$$
$$= pdx : ds \text{ (weil } dy = pdx \text{ ist I.)}$$
$$= p : \frac{ds}{dx}$$
$$= p : \sqrt{(1 + p^2)}$$

so hat man $$\frac{PV}{MV} \cdot N = \frac{p \cdot N}{\sqrt{(1 + p^2)}}$$

III. Es ist MW : MS = PV : MV, also

$$\frac{MV}{MS} \cdot T = \frac{PV}{MV} \cdot T = \frac{p \cdot T}{\sqrt{(1 + p^2)}} \text{ (II.)}$$

V. 2 Abschn. 6. ꝛc. und 1. Abschn. 167. der Satz $N = \frac{2v}{r}$ sagt nämlich soviel: Die Normalkraft verhält sich zu 1 d. i. zu unserer Schwere, wie die doppelte Höhe, welche der Geschwindigkeit zugehört, womit sich der Körper bewegt, zum Halbmesser des Kreises, in dessen Bogen er sich bewegt. Ist die Bahn des bewegten Körpers nicht selbst ein Kreis, sondern irgend eine andere krumme Linie, so läßt sich doch an jeder Stelle seiner Bahn die Bewegung so ansehen, als geschähe sie durch ein sehr kleines Stückgen desjenigen Kreises, dessen Krümmung die Bahn an dieser Stelle hat, d. i. als geschähe sie an jeder Stelle durch einen Kreisbogen, dessen Halbmesser der Halbmesser der Krümmung wäre s. die An. d. Un. 538. daher hier r den zu jeder Stelle der Bahn gehörigen Halbmesser der Krümmung bedeutet. Die Formeln im Buch geben sich, wenn man 1.) in II. den hier gefundenen Werth von N, und hierin weiter 2.) aus I. den Werth von $dx = \frac{ds}{\sqrt{(1+p^2)}}$ substituirt.

VIII. auf die Tangenten senkrecht sind ꝛc. Ueberhaupt geben zwo Linien ad, ch, (fig. 29.) die eine senkrecht auf den einen Schenkel eines gegebenen Winkels ef, die andere senkrecht auf den andern Schenkel dieses Winkels eg gezogen, allemal einen Winkel abc, der dem gegebenen feg gleich ist, denn die Winkel dke, bkh sind als Wechselswinkel, und die edk, bhk als rechte Winkel gleich groß, folglich muß auch der dritte b so groß als e sein. Daraus folgt dann der besondere Satz, daß der Winkel, den zwo Normalen einschliesen, und der, den zwo diesen Normalen zugehörige Tangenten mit einander machen, allemal gleich groß sein müssen.

XII. Die Tangentialkraft wirkt nämlich nach PM (VI.) die Normalkraft aber nach MP (V.) Die Kraft also zu finden, die aus beiden zusammen nach MP entsteht, muß man iene (VI.) von dieser (V.) abziehen. Die gemeinschaftliche Kraft, die nach AP entsteht, kommt erst in XIII. vor.

XIII. der ersten gleich ist ꝛc. d. i. wenn am Ende der Bewegung durch AM, $v = b$; denn eigentlich ist sonst allgemein

$$(\sqrt{v}) : (\sqrt{b} - \text{Cos. } \lambda \cdot \sqrt{v}) = 1 : \left(\left(\sqrt{\frac{b}{v}} \right) - \sqrt{v} \right)$$

welches sich für $v = b$ in $1 : (1 - \text{Cos. } \lambda)$ verwandelt.

Bei dieser Summe ꝛc. nämlich für $\lambda = 90°$, oder wenn der Körper sich in der Stelle der krummen Linie befindet, deren Tangente der ED gleichlaufend ist.

nichts

nichts auf die Geschwindigkeit an ꝛc. weil für den Fall die Summe $m\sqrt{\frac{b}{g}}$ durch lauter beständige Grössen ausgedruckt wird.

§. 151. (K. §. 329.)

IIII. woraus sich die Krümmungen ꝛc. Wenn man annimmt, daß sich der Strahl von A an, in ein solches Sphäroid ablenke, worin sich die Quadrate der Querschnitte Z verkehrt wie die zugehörigen Abscissen x, die ich (fig. 30.) von e nach A zu nehme, verhalten, so läßt sich für dieß Sphäroid die Gleichung so ausdrucken

$$Z^2 = \frac{a^5}{x} \quad (\hbar$$

wo a^5 überhaupt eine beständige Größe bedeutet, die ich nur der Gleichheit der Abmessungen wegen in der 5ten Potenz ausgedruckt habe. Aus Erl. der An. d. Unendl. S. 130. giebt sich für die Kubatur dieses Sphäroids, wenn ich den zu x gehörigen körperlichen Raum desselben S nenne, also statt des dortigen Z hier S, und statt des dortigen y hier Z gebrauche,

$$S = 2xZ$$

Es ist aber $Z = \pi y^2$, mithin $Z^2 = \pi^2 y^4$; also gäbe das für die Krümmung der Linie AMN aus $\hbar$ die Gleichung

$$\pi^2 y^4 = \frac{a^5}{x} \text{ oder } y^4 = \frac{a^5}{\pi^2 x}$$

Wenn man also die Axen verwechselt, und die Abscissen auf eD, die Ordinaten aber der ef gleichlaufend nimmt, so ist

$$ey^4 = \frac{a^5}{\pi^2 yg} \text{ oder } x^4 = \frac{a^5}{\pi^2 y} \text{ oder } y = \frac{a^5}{\pi x^4}$$

Nimmt man also an, der Wasserstrahl AE werde so von der Ebene BD abgelenkt, daß der Strahl an iede Stelle γ, für die nämlich $e\gamma \geq Ad$ ist, mit einer Kraft y stößt, die sich verkehrt wie das Biquadrat der Entfernung dieser Stelle von der Mittellinie AE des Strahls verhält, so giebt sich der gesammte Stos auf die Ebene Bd = S =

$$2\,Ae \times \text{Querschnitt bei A}$$

welches mit dem Satz in (III.) übereinstimmte. Es wäre aber solchergestalt δgm eine besondere Art von Hyperbel deren Asymptoten eA, Bd wären,

in

in der aber die Ordinaten fg langſamer als in der Hyperbel Erl. der An. d. Un. a. a. O. abnähmen, weil hier nur die Querſchnitte des Sphäroids ſo abnehmen, wie dort die Ordinaten. Aber die hyperboliſche Geſtalt ſetzte auch voraus, daß die Ebene BD eigentlich unendlich groß ſein müßte, wenn ſie den ganzen Stos auffangen ſollte. Daß ſich der Strahl hyperboliſch krümmt, ſcheint wirklich mit der Natur übereinzukommen. Und wenn nur die Fläche BD beträchtlich größer als $\beta\gamma$ oder als der Querſchnitt $\alpha\delta$ bei A iſt, ſieht man, daß doch ſchon der größte Theil des erweiterten Strahls aufgefangen wird, der ſich ſchon dem Produkt 2Ae × Querſchnitt $\alpha\delta$ ſehr nähert.

Er. Es ſei Ae = 30 F. der Durchmeſſer des Strahls bei A, $\alpha\delta = \frac{1}{2}$ F. die Linie BD = 1 F. das ich = pq = nv ſetzen will, ſo iſt

1.) der zu eA gehörige hyperboliſchſphäroidiſche Raum $S = 2x \cdot Z$

$$= 2 \cdot eA \cdot \pi \cdot \tfrac{1}{4}\alpha\delta^2 = 2 \cdot 30 \cdot 3{,}141 \cdot \frac{1}{16} = \frac{188{,}46}{16}$$

$= 11{,}779$ Cub. F.

2.) Nun iſt $a^5 = \pi^2 x y^4$ alſo hier

$$\begin{aligned} l\,a^5 &= 2\,l\pi + lx + 4ly \\ &= 2l\,3{,}141 + l\,30 - 4l4 \\ &= 0{,}9941358 \\ &\quad + 1{,}4771212 - 2{,}4082400 \\ &= 2{,}4712570 - 2{,}4082400 \\ &= 0{,}0630170 \end{aligned}$$

und daher $a^5 = 1{,}158$

3.) Daraus giebt ſich nun der zu eo gehörige hyperboliſchſphäroidiſche Raum, der S' heiſen ſoll = 2xZ =

$$2 \cdot \frac{a^5}{\pi^2 y^4} \cdot Z$$

$$= \frac{2a^5}{\pi^2 y^4} \cdot \pi y^2 = \frac{2a^5}{\pi y^2}$$

$$\text{alſo hier} = \frac{2a^5}{\pi \cdot op^2} = \frac{2 \cdot 1{,}158}{3{,}141 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{9{,}264}{3141}$$

$= 2{,}949$ Cub. Fus.

4. Das

4.) Das Stück vqmn druckt noch mit auf BD, und das Stück des Sphäroids, das nicht mehr druckt, das nämlich außerhalb der Ebene fällt, ist

$$= 2{,}949 - eo \cdot 3{,}141 \cdot en^2$$

nun ist eo das zu $y = op = en$ gehörige x, also $= \frac{a^5}{\pi^2 \cdot en^2}$, und daher das gedachte Stück =

$$2{,}949 - \frac{a^5}{\pi^2 \cdot en^4} \cdot \pi \cdot en^2$$

$$= 2{,}949 - \frac{a^5}{\pi \cdot en^2} \text{ oder } = \frac{2a^5}{op^2 \cdot \pi} - \frac{a^5}{\pi \cdot op^2}$$

$$= \frac{a^5}{\pi \cdot op^2} = \frac{2{,}949}{2} = 1{,}474$$

5.) Demnach leidet die Fläche, deren Durchmesser BD nur einen Fus beträgt, schon einen Druck $= S - \frac{1}{2}S' = 11{,}779 - 1{,}474 = 10{,}305$ Cub. Fus oder beinahe $\frac{7}{8}$ der doppelten Wassersäule $\alpha\beta\gamma\delta$.

6.) Nähme man qp = 2 Fus, so erhielte man (no. 3.) $S' = 0{,}737$ C. F. also $\frac{S'}{2} = 0{,}368$ mithin den Druck auf die Fläche =

$$11{,}779 - 0{,}368 = 11{,}411 \text{ Cub. Fus}$$

beinahe $= \frac{1}{32}$ der doppelten Wassersäule.

7.) Und so würde, wenn der Strahl wirklich die erwähnte hyperbolische Krümmung erhielte, von der er doch auch wohl nicht viel abweichen wird, der Stos auf die Fläche allemal der doppelten Wassersäule desto näher kommen, ie mehr die Fläche den Querschnitt des Strahls bei A an Größe übertrift; und schon bei einiger Größe, würde der Stos dieser Grenze schon nahe kommen.

8.) Daß der Stos auf die Fläche **allemal geringer** sei als ihn III. giebt, wie Hr. **Euler** gegen Hrn. B. erinnert, stimmt mit dem, was ich hier gesagt habe, sehr wohl überein. Und wäre des Brets Ebene dem Querschnitt bei A gleich, so würde aus dem Gesagten folgen, daß alsdann der Stos auf das Bret nur dem Druck der **einfachen** Wassersäule gleich sei wie (324. II.) s. (K. 344. das. Erl.)

§. 152. (K. §. 335.)

wer (324. II.) annimmt ꝛc. Aber wenn man auch Bern. Theorie (329. III.) annimmt, ſo ſehe ich doch nicht, wie man die Wirkung des erweiterten oder abgelenkten Strahls annehmen könne, wenn die Ebene, die den Strahl auffangen ſoll, nicht größer als der Querſchnitt des natürlichen d. i. unerweiterten Waſſerſtrahls iſt. Der natürliche Strahl kann ſich auf ſolcher Ebene nicht erweitern (wie vor. Erl. am E.). Und da eine in einem Fluß dem Strohm entgegengeſetzte Ebene nicht größer ſein kann, als der natürliche Querſchnitt des auf ſie ſtröhmenden Strahls, ſo wird, ſelbſt wenn B. Theorie richtig iſt, in dem gegebenen Fall doch allemal mit Bel. nach (324. II.) die Rechnung geführt werden müſſen. Ueberhaupt muß bei der Anwendung der Bernoulliſchen Theorie, allemal eine Ebene vorausgeſetzt werden, die groß genug iſt, den ganzen erweiterten Strahl aufzufangen. Hiermit ſtimmt auch der Elviusſche Verſuch (284.) vollkommen überein, wie ich weiter unten (437.) zeigen werde.

§. 153. (K. §. 344.)

nach dem größten Werth des Stoßes geführt ꝛc. Wenn man vor Anlegung einer Maſchine erſt einen Ueberſchlag in Anſehung deſſen, was man ſich von derſelben verſprechen kann, machen will, ſo wird es wohl klüger ſein, die Rechnung nur auf das zu richten, was man wenigſtens zu gewarten hat, und alſo nicht gerad den größten Werth des Stoſes zu gebrauchen. Doch dient die Rechnung nach dem größten Werth bei Ueberſchlägen da, wo man unterſuchen will, ob etwa auch das Aeuſerſte, das man bei der höchſt vollkommenen Einrichtung der Maſchine erhalten könnte, noch den Effect nicht leiſte, welchen man in einem gegebenen Fall nöthig hat.

und genauere Beſtimmungen ꝛc. Was Hr. Euler vom Gebrauch der B. Theorie ſagt, ſtimmt völlig mit dem überein, was ich (329.) bemerkt habe. Sollte alſo die dort gewieſene Rechnung vielleicht ein Mittel abgeben können, die hier vorfallenden Rechnungen etwas beſtimmter zu führen? Wenn dort allgemein Ae = h, der Querſchnitt des Strahls bei A = Z, und die Fläche, die den Strahl auffängt = Q geſetzt wird, ſo iſt allgemein dort $a^2 = Z^2 \cdot h$ alſo dort no. 1. $S = 2h \cdot Z$, und das dortige

$$S' = \frac{2a^2}{Q} = \frac{2Z^2 \cdot h}{Q}, \text{ alſo } \frac{1}{2} S' = \frac{h \cdot Z^2}{Q},$$

und

und nun der gesammte auf die dem Strahl senkrecht entgegengesetzte Ebene

$$= S - \tfrac{1}{2} S' = 2hZ - \frac{hZ^2}{Q} = 2hZ \cdot \left(1 - \frac{Z}{2Q}\right).$$

Multiplicirt man noch mit $\sin\theta$ und setzt $Q \cdot \sin\theta$ statt Q, so gäbe sich allgemein

der Stos auf iede gegen die Richtung des Strahls unter dem Winkel θ geneigte Fläche. $\Big\}$ $= 2hZ \cdot \sin\theta \left(1 - \frac{Z}{2Q\sin\theta}\right)$ (♀)

Nähme man solchergestallt $Q = Z : \sin\theta$, so wäre der Stos $= 2hZ \cdot \sin\theta \cdot (1 - \frac{1}{2}) = hZ \cdot \sin\theta$, wie auch Hr. Euler behauptet (im Anf. dieses §.). Für $Q = 4Z$, wie ich im Anf. des Ex. 329. angenommen habe, würde für $\theta = 90°$ der Stos nach dieser Formel

$$= 2hZ \cdot \sin 90° \cdot \left(1 - \frac{Z}{2 \cdot 4Z \cdot \sin 90°}\right)$$
$$= 2hZ \cdot (1 - \tfrac{1}{8})$$
$$= \tfrac{7}{8} \cdot 2hZ$$

und für $Q = 16Z$, der Stos

$$= 2hZ \cdot (1 - \tfrac{1}{32})$$
$$= \tfrac{31}{32} \cdot 2hZ$$

daß also das dortige beinahe nur von der Irrationalität der dort im Rechnen gebrauchten Zahlen herrührt.

Diesemnach wäre der allgemeine Ausdruck für den Stos gegen die Ebene durch die im Strahl in einer Secunde fortlaufende Wassermenge A ausgedruckt,

$$= A \cdot \sin\theta \cdot \left(1 - \frac{Z}{2Q \cdot \sin\theta}\right) \cdot \sqrt{\frac{v}{g}} \quad (♄.$$

Es versteht sich, daß, wenn der dem Q parallele Querschnitt des natürlichen Strahls $> Q$ ist, alsdann nicht der ganze senkrechte Querschnitt in Anschlag kommen könne, sondern nur $Z = Q \cdot \sin\theta$ gerechnet werden und $A \cdot \sin\theta$ statt A gesetzt werden müsse. Dadurch verwandelt sich dann der Ausdruck (♀) in

$$2h \cdot Q \cdot \sin\theta \cdot \sin\theta \cdot \left(1 - \frac{Q \cdot \sin\theta}{2Q \cdot \sin\theta}\right) =$$
$$2h \cdot Q \cdot (\sin\theta)^2 \cdot (1 - \tfrac{1}{2}) =$$
$$hQ \cdot (\sin\theta)^2$$

und der (ħ) in

$$A \sin\theta \cdot \sin\theta \cdot \left(1 - \frac{Q \cdot \sin\theta}{2Q \cdot \sin\theta}\right) \cdot \sqrt{\frac{v}{g}} =$$

$$A \cdot (\sin\theta)^2 \cdot (1 - \tfrac{1}{2}) \cdot \sqrt{\frac{v}{g}} =$$

$$\tfrac{1}{2} A \cdot (\sin\theta)^2 \cdot \sqrt{\frac{v}{g}}$$

alles Hrn. **Eulers** Sinne völlig gemäß. Und so könnte man also (☿ und ħ) als völlig allgemeine Ausdrücke ansehen, nur daß man $A \cdot \sin\theta$ statt A, und $Q \cdot \sin\theta$ statt Z setzt, **wann des natürlichen Strahls senkrechter Querschnitt** $> Q \cdot \sin\theta$ ist, wie die Natur der Sache mit sich bringt. Daß ich mich hier anderer Buchstaben als im Buche bedient habe, kann Niemanden, der diese Rechnungen versteht, irre machen. Was im Buch Z^2, v und y^2 heißt, ist hier Z, h und Q.

§. 154. (K. §. 346.)

II. Ich will den Stos P nennen, so wäre nach Erl. zu 344. (☿)

$$♄) \quad P = 2Z \cdot (\sqrt{h} - \sqrt{x})^2 \sin\theta \cdot \left(1 - \frac{Z}{2Q \cdot \sin\theta}\right)$$

Um diese Formel durch A auszudrucken, darf man nicht auf den Einfall kommen, etwa in ħ (344. Erl.) nur auch $(\sqrt{h} - \sqrt{x})^2$ statt v zu setzen, und sonst alles ungeändert zu lassen. Das würde P =

$$A \cdot \sin\theta \left(1 - \frac{Z}{2Q \cdot \sin\theta}\right) \cdot \frac{\sqrt{h} - \sqrt{x}}{\sqrt{g}} \text{ geben,}$$

welches mit dem Buch gar nicht zusammenstimmt. Daß dieses nicht angeht, erhellet daraus, weil, wenn man die dortige Formel so verwandeln wollte, auch alsdann A der Höhe $(\sqrt{h} - \sqrt{x})^2$ zugehören müßte; das ist aber offenbar nicht, sondern A hängt blos von v ab und kann durch x gar nicht geändert werden, es bleibt also noch wie zuvor $A = 2Z\sqrt{gh} \cdot$ und dieß anzudeuten, darf man also nur $\frac{A}{\sqrt{gh}} = 2Z$ setzen, und dieses in (♄) gebraucht, giebt

$$P = \frac{A(\sqrt{h} - \sqrt{x})^2 \cdot \sin\theta}{\sqrt{gh}} \cdot \left(1 - \frac{Z}{2Q \cdot \sin\theta}\right)$$

III.

III. Nach den vorigen Ausdrücken wäre also hier

$$1.)\ P = \frac{2Z \cdot (\sin\theta\sqrt{h} - \sin\eta\sqrt{u})^2}{\sin\theta} \cdot \left(1 - \frac{Z}{2Q \cdot \sin\theta}\right)$$

$$2.)\ P = \frac{A \cdot (\sin\theta\sqrt{h} - \sin\eta\sqrt{u})^2}{\sin\theta \cdot \sqrt{gh}} \cdot \left(1 - \frac{Z}{2Q \cdot \sin\theta}\right)$$

§. 155. (K. §. 354.)

die Winkelgeschwindigkeit giebt ꝛc. Es heiſe nämlich der Bogen, den der Endpunkt des Halbmeſſers P in einer Sec. durchlauft, a, ſo iſt

$$a = \frac{2\sqrt{gu}}{CP} = \frac{2\sqrt{gu}}{CP^2} \cdot CP$$

d. i. er beträgt $\frac{2\sqrt{gu}}{CP^2}$ vom Halbmeſſer des Rades. Seßt man alſo den Halbmeſſer $= 1$, ſo giebt der Ausdruck $\frac{2\sqrt{gu}}{CP^2} = a$ den Werth des Bogens für den Halbm. $= 1$. Sucht man nun den ſo gefundenen Werth des Bogens in dergleichen Tafeln, wie die **Lambertſchen** oder die **Schulzſchen** ſind, auf, wo die jedem Winkel zugehörige Bogenlänge für den Halbmeſſer $= 1$ berechnet iſt, ſo findet man ohne Mühe den dem Bogen zugehörigen Winkel, welches dann der Winkel iſt, um den ſich die CP in jeder Sec. herumdreht d. i. die **Winkelgeſchwindigkeit.**

Ex. Es ſei der Kürze wegen $gu = 64$, $CP = 8$, ſo iſt $a = \frac{2\sqrt{64}}{64}$ $= \frac{2 \cdot 8}{64} = \frac{1}{4}$ für den Halbmeſſer $= 1$. Weil nun in denen erwähnten Tafeln die Zahlen allemal in Decimalbrüchen ausgedruckt ſind, ſo verwandle man $\frac{1}{4}$ in einen Decimalbruch; das giebt $\frac{1}{4} = 0{,}2500000$; dieſe Bogenlänge ſuche man in den angeführten Tafeln auf; man findet

0,244346095 . . .	= Bog 14°
0,005526875 . . .	= Bog 0° 19′
0,000126051 . . .	= Bog 0° 0′ 26″
0,249999021 . . .	= Bog 14° 19′ 26″

Man kann alſo $a = 14° 19' 26''$ annehmen, und iſt gewiß, daß man höchſtens nur in Terzien fehle, die ſich in den Tafeln nicht befinden. Des Rades Winkelgeſchwindigkeit wäre alſo hier für eine Secunde $= 14° 19' 26''$. Man ſieht aber leicht, daß es bei Unterſuchungen von dieſer Art lächerlich wäre, genauer als bis auf Minuten die Rechnung führen zu wollen.

§. 156. (K. §. 355.)

IV. **in keine Betrachtung kommt** ꝛc. Es kann freilich der Stos $M \cdot \sin YPH = M \cdot \text{Cof. } APH = M \cdot \text{Cof } \eta$ die Bewegung nicht **vergröſſern**, wohl aber in der Ausübung **vermindern**. Es kommt nämlich dieſer Theil des Stoſes noch mit zum Gewicht des Rades, womit ſolches auf ſeine Wellzapfen druckt, und die **Friktion** an dieſen Zapfen muß alſo dadurch vergröſſert werden, welches der Bewegung Abbruch thut.

Nach Erl. zu 344. wäre nun hier, wenn ich v ſtatt des dortigen h beibehalte, der auf CP ſenkrechte Stos nach $PH =$

$$\frac{A \cdot (\sin\theta\sqrt{v} - \sin\eta\sqrt{u})^2}{\sin\theta\sqrt{gv}} \cdot \sin\eta \cdot \left(1 - \frac{Z}{2Q \cdot \sin\theta}\right)$$

V. **Auf die Schaufel fällt** ꝛc. oder genauer: die Menge Waſſer, die in **ieder Secunde** auf die Schaufel fällt.

VIIII. Alſo nach (IIII. Erl.) die **gleichförmige Wirkung** $=$

$$\frac{2A \cdot (\sin\theta \cdot \sqrt{v} - \sin\eta\sqrt{u})^2 \cdot \sin\eta}{\sin\theta} \cdot \left(1 - \frac{Z}{2Q \cdot \sin\theta}\right)\sqrt{\frac{u}{v}}$$

X. Die nähere, Hrn. **Eulers** Sinne völlig gemäße Beſtimmung gäbe ſich aus VIIII. von ſelbſt.

§. 157. (K. §. 356.)

IIII. Da der Ausdruck für die Wirkung bei der vortheilhafteſten Verhältnis zwiſchen Geſchwindigkeit des Waſſers und Geſchwindigkeit des Rades $\frac{8}{27} A \cdot v \cdot \sin\theta^2 \cdot \left(1 - \frac{Z}{2Q \cdot \sin\theta}\right)$ den Winkel η gar nicht mehr enthält, ſo iſt das ein Beweis, daß die Richtung, in der die Schaufel fortgeht, mit der Ebene der Schaufel, welchen Winkel man will, machen kann, ohne daß dieſe Wirkung dadurch geändert wird, wenn nur θ oder die Neigung des Strahls gegen die Schaufel dabei ungeändert bleibt. Wenn aber des Strahls

Rich-

Richtung gegeben ist, so fällt in die Augen, daß sich θ mit der Lage der Schaufel ändern muß, und daß also θ eine Funktion von η ist, und so hienge der erwähnte Ausdruck doch wirklich von η ab, ob er gleich nicht η enthält, weil sich der Werth von θ nach dem von η richtet, so lange sich der Weg des Strahls nicht ändert. Aenderte man also bei veränderter Lage der Schaufel den Weg des Strahls, so daß er immer z. B. noch senkrecht gegen die Schaufel stiese d. i. daß $\theta = 90°$ bliebe, so bliebe auf solche Art der Effekt immer ungeändert. s. unten K. 387. IIII.

§. 158. (K. §. 358.)

Man darf aber die hier angegebene Geschwindigkeit in der Ausübung nie erwarten, weil das Rad doch allemal, wenn es auch leer geht, noch einige Last zu wältigen hat, nämlich die Friktion. Wie solche gehörig in Rechnung gezogen werden muß, werde ich unten zeigen.

§. 159. (K. §. 360.)

Aus (356. III.) ist $y = \frac{\sin\theta}{3 \cdot \sin\eta}$; man muß also (355. IIII.) $\frac{\sin\theta}{3 \cdot \sin\eta} \cdot \sqrt{v}$ statt $\sqrt{u}$ setzen, so verwandelt sich der dortige Ausdruck für den Stos in

$$\frac{A \cdot \left(\sin\theta \cdot \sqrt{v} - \sin\eta \cdot \frac{\sin\theta}{3 \cdot \sin\eta}\sqrt{v}\right)^2}{\sin\theta\sqrt{gv}} \cdot \sin\eta$$

$$= \frac{A \cdot (\sin\theta \cdot \sqrt{v} - \frac{1}{3}\sin\theta\sqrt{v})^2 \cdot \sin\eta}{\sin\theta\sqrt{gv}}$$

$$= \frac{A \cdot (\frac{2}{3}\sin\theta\sqrt{v})^2 \cdot \sin\eta}{\sin\theta\sqrt{gv}}$$

$$= \frac{A \cdot \frac{4}{9}\sin\theta^2 \cdot (\sqrt{v} \cdot \sqrt{v}) \cdot \sin\eta}{\sin\theta \cdot \sqrt{gv}}$$

$$= \frac{4}{9} A \cdot \sin\theta \cdot \sin\eta \sqrt{\frac{v}{g}}$$

und nach (344.) $= \frac{4}{9} A \cdot \sin\theta \cdot \sin\eta \cdot \left(1 - \frac{Z}{2Q\sin\theta}\right)\sqrt{\frac{v}{g}}$

wo aber wieder nicht auf die Friktion gesehen wird, bei deren Betrachtung die eigentlich zu hebende Last geringer genommen werden muß.

§. 160.

§. 160. (K. §. 361.)

Das bleibt auch bei Betrachtung aller Hindernisse z. B. der Friktion u. a. richtig, wenn die Summe dieser Hindernisse mit zur Last gerechnet wird. Daher ist dieser Satz zur Erhaltung der größten Wirkung in der Ausübung weit dienlicher als der (360.), weil dort erst die Summe sämmtlicher Hindernisse von der anzuhängenden Last berechnet, und von der dort angegebenen Last abgezogen werden müßte, um die Grösse der anzuhängenden Last zu finden.

§. 161. (K. §. 362.)

In (356.) würde nämlich θ als schon bestimmt angesehn und dafür die größte Wirkung gefunden; hier aber soll überhaupt die größte Wirkung gesucht werden, so daß erst θ am vortheilhaftesten bestimmt wird. Nach (344.) wäre auf solche Art die allergrößte Wirkung $= \frac{2}{27} \cdot A \cdot a \left(1 - \frac{Z}{2Q}\right)$ wo nach denen oben beigebrachten Erfahrungen freilich a noch um etwas größer als v, also wirklich um was zu groß ist, weil v eigentlich die hierhergehörige Grösse wäre.

§. 162. (K. §. 363.)

Die genauere Bestimmung giebt sich aus der gegebenen Formel (362. Erl.) von selbst. Es sei z. B. $Z = 2$ Quadr. Fus, $Q = 2{,}1$ Quadr. Fus; so wäre die Wirkung $=$

$$\frac{8}{27} \cdot A \cdot a \left(1 - \frac{2}{4{,}2}\right) = \frac{22}{42} \cdot \frac{8}{27} \cdot A \cdot a$$

also um $\frac{1}{21}$ grösser als nach der Bestimmung im Buch.

§. 163. (K. §. 372.)

Es ist nämlich die Last des am Umfang *) mit der Geschwindigkeit, welche der Höhe u zugehört, herumgehenden Rades,

$$Q = \frac{A \cdot (\sin\theta\sqrt{w} - \sin\eta\sqrt{u})^2}{\sin\theta\sqrt{gw}} \cdot \sin\eta$$

und die der Höhe $u = o$ zugehört,

P =

*) Es versteht sich, daß hier allemal der Halbmesser vom Mittelpunkt des Rades bis an die Stelle der Schaufel, wo man sich den Mittelpunkt des Stoses zu gedenken hat, verstanden werden muß.

$$P = \frac{A \cdot \sin\theta\sqrt{w} - \sin\eta \cdot o)^2}{\sin\theta\sqrt{gw}}$$

$$= \frac{A \cdot \sin\theta^2 \cdot w}{\sin\theta\sqrt{gw}}$$

Setzt man also $\sin\eta = \sin\theta$, so hat man

$$Q : P = (\sqrt{w} - \sqrt{u}) : w$$

§. 164. (K. §. 376.)

Man vergleiche den Ausdruck $4m \cdot (1-m)^2 \cdot \sin\theta^2 \cdot z^2 \cdot v \cdot \sqrt{gv}$ mit der gewöhnlichen Formel für die paraboliſchen Flächen einer Parabel, für welche $ax = y^2$ iſt; der zu jedem x gehörige paraboliſche Raum iſt alsdann $\frac{2}{3}yx = \frac{2}{3}x\sqrt{ax}$. Man ſetze demnach $4m \cdot (1-m)^2 \cdot \sin\theta^2 \cdot z^2 \cdot \sqrt{g} = \frac{2}{3}\sqrt{a}$, alſo

$$\sqrt{a} = 6m \cdot (1-m)^2 \cdot \sin\theta^2 \cdot z^2\sqrt{g}$$

und $$a = 36m^2 \cdot (1-m)^4 \cdot \sin\theta^4 \cdot z^4 \cdot g,$$

ſo fällt in die Augen, daß $4m \cdot (1-m)^2 \cdot \sin\theta^2 \cdot v\sqrt{gv}$ den paraboliſchen Raum für die Abſciße v bei einer Parabel giebt, deren Parameter $= 36 \cdot m^2 \cdot (1-m)^4 \cdot \sin\theta^4 \cdot z^4 \cdot g$ iſt. Verzeichnet man alſo dieſe Parabel, ſo ſtellt in ihr der zu jeder Abſciße v gehörige paraboliſche Raum den Effect, der zur Höhe v gehört, vor. Und daß ſich dieſe paraboliſchen Räume, alſo dieſe Effekte, wie die Quadratwurzeln aus den Würfeln der Abſcißen, alſo wie die Quadratwurzeln aus den Würfeln der Höhen verhalten, iſt ſchon Erl. d. An. d. Unendl. S. 126. bemerkt worden.

§. 165. (K. §. 381.)

Weil die Schaufeln alle Augenblick ihre Stelle verändern, und daher der Winkel keine beſtändige Größe iſt, ſo kann man nicht durchaus $\theta = 90°$ ſetzen, wenn gleich für die unterſte Stelle der Schaufel $\theta = 90°$ iſt. Jede Schaufel kommt, bevor ſie die unterſte Stelle erreicht, allemal zuvor in eine ſchiefe Lage, bei der ſie die folgende Schaufel gegen den Waſſerſtrahl völlig verdeckt; iſt nämlich die Anzahl der Schaufeln $= n$, ſo geſchieht ſolches allemal, wann $\theta = 90° - \frac{180°}{n}$ wird. Es iſt auch in dieſer Lage der Schaufel nicht $zz = \frac{A}{C}$ (wo zz den letzten ſenkrechten Querſchnitt des an-

schlagenden Wasserstrahls, A die iede Sec. anschlagende Wassermenge und C die Geschwindigkeit, mit der das Wasser anschlägt, bedeutet) sondern weil ein Theil des Wasserstrahls, der $= \frac{\sin v \frac{180°}{n}}{\sin v \frac{360°}{n}} \cdot A$ ist, die Schaufel nicht treffen kann, so hat man

$$zz = \frac{A}{C} \cdot \left(1 - \frac{\sin v \frac{180°}{n}}{\sin v \frac{360°}{n}} \right)$$

oder wenn yy der Querschnitt ist, worin die Ebene der Schaufel vom Wasserstrahl getroffen wird, so ist

$$yy = \frac{A}{C \cdot \sin \theta} \cdot \left(1 - \frac{\sin v \frac{180°}{n}}{\sin v \frac{360°}{n}} \right)$$

$$= \frac{A}{C \cdot \operatorname{Cos} \frac{180°}{n}} \cdot \left(1 - \frac{\sin v \frac{180°}{n}}{\sin v \frac{360°}{n}} \right)$$

Nimmt man also, für den möglichst vortheilhaften Werth von θ, das Mittel zwischen 90° und $90° - \frac{180°}{n}$ also $90° - \frac{90°}{n}$ und für yy das Mittel zwischen $\frac{A}{C}$ und dem eben erwähnten Werth von yy, also

$$\frac{A}{2C} + \frac{A}{2C \cdot \operatorname{Cos} \frac{180°}{n}} \cdot \left(1 - \frac{\sin v \frac{180°}{n}}{\sin v \frac{360°}{n}} \right)$$

=

$$= \frac{A}{2C} \cdot \left(1 + \frac{1}{\text{Cof}\frac{180°}{n}} - \frac{\sin v \frac{180°}{n}}{\text{Cof}\frac{180°}{n} \cdot \sin v \frac{360°}{n}}\right)$$

Heißt der eingeschlossene Faktor φ, so hat man $yy = \frac{A\varphi}{2C}$

Auch ersieht man hieraus, daß die vortheilhafteste Geschwindigkeit c der Schaufeln eigentlich nicht so schlechthin nach (361.) $= \frac{1}{3}C$ gesetzt werden könne; sondern aus (356. III.) hat man allgemein

$$c = \frac{\frac{1}{3}C \cdot \sin\theta}{\sin\eta}, \text{ also für } \eta = 90°$$

$$c = \frac{1}{3}C \cdot \sin\theta$$

$$= \frac{1}{3}C \cdot \sin\left(90° - \frac{90°}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{3}C \cdot \text{Cof}\frac{90°}{n}$$

welches freilich für die Ausübung allemal mit $\frac{1}{3}C$ für einerlei angesehen werden kann. Wäre z. B. $n = 18$, so wäre $\frac{90°}{n} = 5°$ und $\text{Cof}\,5° = 0{,}996$ also $c = \frac{1}{3}C \cdot 0{,}996 = 0{,}332 \cdot C$, welches von $\frac{1}{3}C$ nicht merklich verschieden ist.

§. 166.

Die Schaufeln wird man am besten so einrichten, daß sie in der tiefsten Stelle den ganzen Wasserstrahl senkrecht auffangen, und so wie die Schaufel ihre tiefste Stelle verläßt, so gleich der Strahl wieder eine andere Schaufel angreift, wie fig. 31. ausweist, wo M der Strahl, ny die Schaufel in der tiefsten Stelle ist, die den ganzen Strahl M senkrecht auffängt, so daß des Strahls Oberfläche zugleich die nächstvorhergehende Schaufel μm berührt.

Heißt nun die Linie vom Mittelpunkt des Rades bis an den äußersten Punkt der Schaufel, hier yn oder ym, λ; so fällt in die Augen, daß, wenn der Strahl die Schaufeln auf die erwähnte Art treffen soll, die Höhe der Schaufeln b, durch diese Formel bestimmt werde

$$b = \lambda \sin v \frac{360^\circ}{n}$$

und wenn b gegeben ist, so hat man

$$n = \frac{360^\circ}{\text{Angul} \cdot \sin v\ (b : \lambda)}$$

§. 167. (K. §. 381.)

Nur $\frac{1}{3}$ Aa zum Momente ꝛc. Wenn man annimmt, das Moment des Stoses vom auffallenden Strahl betrage hier nur halb soviel als 365, so wäre solches $= \frac{4}{27}$ Aa, weil aber überdas auch das Wasser nicht alle senkrecht auffährt und überhaupt nicht so anstöst, wie es anstosen sollte, so bleibt, wenn man noch $\frac{1}{4}$ des erwähnten Effekts abrechnet, solcher noch $\frac{3}{27}$ Aa $= \frac{1}{9}$ Aa. Wie ich aber aus dem, was im Buch gemeldet wird, schliesen kann, so hat sich Hr. **Euler** mit Fleis nicht bei einer so unvollkommenen Maschine und deren Berechnung lange aufhalten, sondern lieber ihre Mängel aufsuchen und dadurch die Maschine verbessern wollen. Man wird mich also nicht tadeln, wenn ich hier noch einige Erinnerungen mache, die ich unten weiter ausführen werde. Der Spielraum kann nämlich ziemlich beträchtlich sein, weil er rings um die Schaufel herumgeht. Hierzu kommt noch der Umstand, daß bei der vortheilhaftesten Bewegung des Rades das an die Schaufel stosende Wasser, weil es nur so geschwind fortströhmen kann, als die Schaufel ihm Platz macht, wirklich nur mit dem dritten Theil der Geschwindigkeit, mit der es die Schaufel erreicht, abfliesen kann, da im Gegentheil das gegen den Spielraum fliesende Wasser freien Lauf behält, also 3 mal so geschwind durchschiest. Daraus erhellet, daß wegen dieses Spielraums ein sehr beträchtlicher Theil von A, den ich $= \frac{A}{\mu}$ setzen will, verlohren gehe. Und wenn man nun noch die Wirkung des übrigen Theils des Aufschlagwassers $= \frac{4}{27} \cdot \left(A - \frac{A}{\mu}\right)$ setzen und dazu noch sämmtliche Hinderniſſe der Bewegung mit in Betrachtung ziehen wollte, wie unten geschehen soll, so würde der Effekt beträchtlich geringer herauskommen, als ihn die Erfahrung giebt, wie ich wirklich durch dergleichen über die Bewegungskräfte auf Salzwerken angestellte Berechnungen bin überführt worden. Ich glaube daher, daß man nicht schlechtweg $\frac{4}{27}\left(A - \frac{A}{\mu}\right)$

als

als den Effekt ansehen könne, sondern daß man hier eine besondere Rechnung zu führen habe, die ich unten auseinander setzen werde.

§. 168. (K. §. 388.)

Anwendungen von diesen drei Arten unterschlächtiger Räder werde ich unten beibringen, daher ich mich hier nicht weiter dabei aufhalte.

§. 169. (K. §. 396.)

in den obersten Kasten kommen ꝛc. Das ist nicht nothwendig, wie aus der gleich folgenden Anmerkung erhellen wird.

schneller fortzutreiben ꝛc. Aber man könnte dieses schnellere Fortgehen durch Anhenkung einer Last verhindern und eben dadurch dem Rad allemal einen so langsamen Gang verschaffen, als man nur will, die Geschwindigkeit des auffallenden Wassers mag noch so groß sein. Nur so viel folgt, daß man bei einem sehr langsamen Gang des Rades, und einer beträchtlichen Geschwindigkeit des Aufschlagwassers, die Schaufeln sehr groß machen müße, damit solche das hineinfallende Wasser sämmtlich fassen können. **Schneller** aber, als das Wasser zufließt, kann das Rad nicht fortgehen.

§. 170. (K. §. 397.)

Man sollte eigentlich die Höhe, die der Geschwindigkeit des Wassers zugehört, von der, die der Geschwindigkeit der Schaufeln zugehört, unterscheiden, weil beide verschieden sein können (Erl. zu 396.) Jene soll b, diese u sein, so ist eigentlich das Moment der Wirkung (396. VI.) = A (a — b). Nun kann man sagen, ie langsamer das Rad geht, desto kleiner ist u, aber nicht nothwendig auch desto kleiner b, weil b unverändert bleiben und doch das Rad durch mehrere Last zu einem langsamern Gang gebracht werden kann. Wiewohl es also nicht verstattet ist, in der Ausübung b allemal so klein zu machen, als man verlangt (s. unten §. 362.), so läßt sich doch der Gang des Rades so langsam bringen, oder u so klein machen, als man verlangt. Man könnte daher fragen, ob der Effekt des oberschlächtigen Rades auch desto größer werde, ie kleiner man u nimmt? (s. 400. VIII.)

§. 171. (K. §. 400.)

I. Die nähere Untersuchung über die Schaufeln kommt unten 409 u. f. vor.

VI. s. Erl. zu 401. IIII.

VIII. Hier wird selbst erinnert (wie Erl. 396.) daß b = u sein könne. Aus Gründen, die ich unten (§. 306 d. Erl.) nenne, setze ich im zweiten Theil $\frac{1}{2}$ A statt 2 A, das giebt das Ganze =

$$A \cdot (a - b) + \tfrac{1}{2} A \, (\sqrt{b} - \sqrt{u})^2 \cdot \sqrt{\frac{u}{b}}$$

Dieser Ausdruck wird am größten für $\sqrt{u} = \frac{1}{3}\sqrt{b}$ und wird alsdann = $A \cdot (a - b) + \frac{8}{27}$ Ab. Die größte Wirkung, die sich durch das Gewicht des Wassers allein erhalten läßt, ist nur = A · (a — b) also die vorige allemal größer, welches im Buch noch umsomehr gilt, weil da $\frac{8}{27}$ Ab statt $\frac{2}{27}$ Ab steht; und ich sehe daher nicht, wie sich der umgekehrte Schluß im Buch rechtfertigen ließe. Ueberhaupt sieht man, daß der zweite Theil der noch zu A · (a — b) kommt, niemals verneint sein kann, und daß daher der Effekt allemal für u < b größer werden müße, als für u = b, weil für u = b der genannte zweite Theil verschwindet. Nun ist es in der Ausübung nicht allemal verstattet, b klein genug zu nehmen; hat man nun in dergleichen Fällen b doch so klein genommen, als es die Ausübung erlaubt, so folgt aus dem Bisherigen, daß man einen desto größern Effekt erhalten wird, je kleiner man u nimmt, nur nicht u < $\frac{1}{9}$ b, weil für $\sqrt{u} = \frac{1}{3}\sqrt{b}$ oder u = $\frac{1}{9}$ b der Effekt am größten wird. Man kann indessen in der Ausübung die Bewegung des Rades für u = $\frac{1}{9}$ b auch noch nicht schlechthin die vortheilhafteste nennen, sondern hat dabei noch auf andere Umstände mit zu sehen, worüber ich mich unten (§. 306. d. Erl.) näher erklären werde.

doch also geringer ꝛc. s. die nächstvorhergehende Erl. u. Erinnerung hiergegen.

§. 172. (K. §. 401.)

II. s. die Erl. zu 396. II.

IIII. Es wäre nämlich alsdann A · (a — u — s) > A · $\frac{8}{27}$ a. Aber das setzt noch voraus, daß alle Schaufeln ihr sämmtliches Wasser bis zur untersten Stelle des Rades behalten, und an solcher es allemal ausschütten, ohne etwas wieder an der andern Seite des Rades, die aufwärts geht, mit in die Höhe zu schieppen. Da aber diese Voraussetzung nicht statt findet, so geht dieserwegen ein beträchtlicher Theil der Wirkung verlohren, und der Satz im Buch muß also näher eingeschränkt werden. Nach Regeln, die in der Folge noch vorgetragen werden, läßt sich allemal die Stelle, wo das Wasser aus den Schaufeln zu fallen anfängt, und die, wo man die Schaufel als völlig vom Wasser entledigt ansehen kann, z. B. bei C und E (im Buch fig. 35.); die mittlere

mittlere vertikale Höhe zwiſchen beiden, hier etwas über D, könnte man alsdann als den Ort anſehen, bis an den man den Ring GH (im Buch fig. 36.) annehmen dürfte; hieſe nun die vertikale Erhöhung des Punkts D über F, c; ſo wäre das Moment der Wirkung (II.) $A \cdot (a - u - s - c)$, und es müßte alſo, den Satz (362.) angenommen, $u + s + c < \frac{12}{17} a$ ſein, wenn die Wirkung des oberſchlächtigen ſowohl als halboberſchlächtigen oder mittelſchlächtigen größer als die größte des mittelſchlächtigen ſein ſollte. Es ſei z. B. $a = 6$ Fus, $u = 1\frac{1}{3}$, $s = \frac{2}{3}$, $c = 2$, ſo iſt $u + s + c = 1\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 2 = 4$, und $\frac{12}{17} a = \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{6}{17} = 4 + \frac{6}{17}$ alſo in dieſem Fall ein 12ſchuhichtiges mittelſchlächtiges Rad vortheilhafter als ein unterſchlächtiges. Von dieſem allem wird unten näherer Unterricht gegeben werden.

§. 173. (K. §. 406.)

in $\frac{nw}{h\mu}$ Secunden ꝛc. Nach 405 durchlauft nämlich die Laſt in n Sec. den Weg $h\mu$; wegen der gleichförmigen Bewegung kann man alſo, zu finden, in wieviel Zeit ſie den Weg w durchlauft, nach der Regel de tri rechnen

$$h\mu : n = w : \text{geſuchten Zeit}$$

die alſo $= \frac{nw}{h\mu}$ wird. Es iſt ferner

die Zeit, worin die Laſt den Weg $h\mu$ durchlauft	:	Zeit, worin ſie den Weg w durchlauft	=
Waſſermenge die in der erſtern Zeit zufließt	:	Waſſermenge, die in der letztern zufließt, die Q heiſen ſoll.	

Dieſe Zeiten aber verhalten ſich wie die Wege ſelbſt, alſo

$$h\mu : w = P : Q \text{ und}$$

$$Q = \frac{Pw}{h\mu}$$

§. 174. (K. §. 408.)

XIII. Ueberhaupt iſt Elvius Rechnung zuſehr über Pauſch und Bogen geführt, und daher für die Ausübung zu unſicher. Die Friktion ſo ſchlechtweg $= \frac{1}{3}$ der Laſt zuſetzen, geht gar nicht an; man muß nicht nur ihre einzele Theile ſorgfältig zuſammen ſuchen, ſondern auch auf die iedesmaligen Momente dieſer einzelen Theile mit ſehen. Ich halte mich aber hier mit Fleis nicht weiter dabei

auf

auf, weil ich unten Gelegenheit haben werde, dergleichen Rechnungen umständlicher aus einander zu setzen.

XVI. dies zusammen ꝛc. Ich dächte nicht, daß diese beiden Vortheile zusammen dürften gerechnet werden, um den gesammten Vortheil, den das Knechtschachtsrad vor dem Maklosrad hat, zu bekommen, sondern daß man nur den einen = 31 allein rechnen müsse, den die Vergleichung der wirklichen Effekte giebt. Denn eben wegen des Vortheils, den die Knechtschachtskunst vor der andern wegen der Angaben in VIIII hat, geht dieses Rad in 14 Sec. ganz herum, da es ohne diesen Vortheil noch nicht herum wäre. Wäre der Vortheil in VIIII. nicht, so würde der Effekt (XII) geringer als 185 Lb., und folglich der Unterschied zwischen Rechnung und Erfahrung (XII.) größer als 57 Lb. ausgefallen sein, nämlich gerad um die 27 Lb. (XIIII). Er würde sich also nicht = 57 sondern = 57 + 27 = 84 Lb. gezeigt haben, und so würde man also in (XV.) statt 57 die 84 setzen müssen. Und nun würde XVI. so heisen müssen:

Die Knechtschachtskunst hat bei den sämmtlichen Hindernissen einen Vortheil von 88 — 84 = 4 (XV.) Lb. und nur diesen allein würde sie haben, wenn nicht noch wegen der Angaben in (VIIII.) einer = 27 hinzukäme; dieß zusammen giebt einen Vortheil von 31 etwa ein Viertheil vom ganzen wirklichen Effekt der Maklöskunst (X.) also verhalten sich die wirklichen Effekte der Maklöskunst und der Knechtschachtskunst beinahe wie 4 : 5

Der Vortheil von 27. (XIIII.) steckt schon mit unter dem von 31. (XV.)

§. 175. (K. §. 413.)

Die hier angenommene Gestalt der Schaufeln, ist von der, wie man sie wirklich macht, zusehr verschieden, als daß sich daher auf die gewöhnlichen oberschlächtigen Räder unmittelbar Anwendungen machen liesen. Es wird daher nicht undienlich sein, bei dieser Gelegenheit, den Bau eines oberschlächtigen Rades in der Kürze etwas näher zu beschreiben.

Das oberschlächtige Rad besteht aus folgenden 4 Haupttheilen

1.) Dem Wellbaum mit seinen Zapfen.
2.) Denen Speigen
3.) Zweien gleichgroßen parallelelen Kränzen,
4.) Denen Schaufeln.

1. Der Wellbaum ist ein starkes rundes oder prismatisches Stück Holz, worin des Rades Axe liegt. Seine Dicke muß theils der Größe des Rades, theils der zu betreibenden Last, theils seiner eigenen Länge angemessen sein. Unter 2 Quadr. Fus darf sein Querschnitt nicht leicht betragen, und meistens, besonders

tragen, und meistens, besonders bei Salzwerken, wo es oft sehr große Lasten zu wältigen hat, muß er größer sein. Nach seinen beiden Enden zu läßt man ihn etwas spitzig zulaufen.

Soll der Wellbaum **prismatisch** gestaltet werden, so wird er ordentlich mit der Zimmeraxt nach der verlangten Gestalt behauen und zuletzt noch ins Feine gehobelt.

Soll er aber **cylindrisch** werden, so erhält man seine Gestalt durchs Drehen auf folgende Art.

In den Stamm AA (fig. 32.) woraus der Wellbaum gedreht werden soll, werden kleine etwa 1 oder 1½ Zoll im Durchmesser haltende Löcher und etwa 5, 6 Zoll tief in die Mitte des Stamms hineingebohrt, wie hier durch Aα angedeutet wird. In diese Löcher werden eiserne Zapfen αa, deren Länge etwa einen Fus betragen kann, eingeschlagen, und nun wird der Stamm mit seinen beiden Zapfen nahe am Stamm auf ein glattes Lager β aufgelegt. In jeden Zapfen wird noch ein bei b nach der Richtung bc gebrochener Arm abc, die **Kurbel**, eingesteckt, und vermittelst deren der Stamm schnell herumgedreht. Nun bedient man sich zur Abrundung eines starken Messers mn (fig. 33.) welches zwischen zweien Stücken oder Platten von Eisen mq, np, liegt, die zugleich mit dem starken hölzernen Stihl, qps verbunden sind. Dieses Instrument faßt ein Mann am Stihl, und stützt es bei qp wider ein vor den Stamm gestelltes Klotz C, so daß beim Herumdrehen des Stamms die hervorragenden Ungleichheiten die Schärfe des Messers mn treffen und losgerissen werden.

Ist nun der Wellbaum ganz fertig, so werden die kleinen eisernen Zapfen wieder herausgeschlagen und statt ihrer ordentliche Wellzapfen eingeschlagen, wobei ich den etwas ungewissen Redegebrauch auf folgende Art unterscheide. Den ganzen (fig. 34.) abgebildeten von e bis f sich erstreckenden, zweimal rechtwinklicht gebrochenen Zapfen, nenne ich den **Krummzapfen**, wo da, be cylinderförmig; df, ab aber platt sind. Das platte Stück df wird in den Wellbaum hineingesteckt und dient zu mehrerer Befestigung des Krummzapfens im Wellbaum; es heißt der **Bläuel**. Der Theil da heist der **Wellzapfen** (auch der **Mühlzapfen**, wenn das Rad eine Mühle betreibt); der Theil ab eigentlich die **Kurbel**, bc die **Warze**. Fehlen ab, be, so heist das Stück fa ein **Bläuelzapfen**, fehlt auch der Bläuel fd, so hat man einen blosen Well- oder Mühlzapfen da.

2. Die **Speigen** sind starke, gewöhnlich zwischen 20 und 30 Quadr. Zoll dicke Hölzer bc, die durch das ganze Rad hindurchgehn und in einander

gezapft sind (fig. 35.); sie sind mit Querhölzern de, ef, unter einander verriegelt, und in diese Riegel sind wieder Hölzer k senkrecht eingezapft, die wie die Hauptspeigen bis an den Kranz reichen müssen, an dem sie befestigt werden. Nach dieser Einrichtung bleibt in der Mitte ein leeres Viereck a, wodurch der vierkantige Wellbaum gesteckt wird, so daß er genau in diese Oefnung paßt. Diese Einrichtung erfodert also einen rechtwinklicht parallelepipedischen Wellbaum. Häufig werden auch die Hauptspeigen durch den Wellbaum durchgesteckt, da dann der Wellbaum iede runde oder prismatische Gestalt haben kann. Weil aber solcher durch dergleichen Verlöcherung geschwächt wird, so behält die vorige Einrichtung vor dieser vielleicht den Vorzug. Da übrigens das Rad zween Kränze hat, wovon leder mit einem solchen Kreuz (fig. 35.) verbunden ist, so erhellet, daß solches bei iedem Rad doppelt vorhanden sein muß.

3. Die Kränze des Rades sind zweene starke hölzerne Ringe, die in einer gewißen Weite parallel gesetzt werden, und zwischen welche die Schaufeln zu liegen kommen. Jeder solcher Kranz besteht aus mehreren krummen Stücken, die der Werkmeister dadurch erhält, daß er einen krummen Stamm, einen **Krümmling**, mit der Säge zerschneidet, die daraus geschnittene Stücken auf einen besonders zugerichteten horizontalen Radstuhl in einen Kreis neben einander legt, und nun vermittelst einer im Mittelpunkt befestigten Stange, die sich in der horizontalen Ebene ganz herumdrehen läßt, auf denen geschnittenen Hölzern die Kreislinie abzeichnet, nach der sie ausgearbeitet werden müssen. Auf solche Art werden also die sämmtlichen Theile des Kranzes, die **Felgen**, die an einander gelegt den ganzen hölzernen Ring geben, zubereitet. Die Zusammensetzung der Felgen geschieht auf folgende Art.

bced (fig. 36.) stellt zwo an einander gelegte Felgen vor, deren Dicke bc = de in die Augen fällt, die Breite aber nicht. Das Felgen zur Rechten reicht von de bis mn, das zur Linken von bc bis $\mu\nu$. Das Felgen zur Rechten bekommt einen Einschnitt $a\tau s\varphi$, und nach eben der Figur wird das Felgen zur Linken verkerbt, so daß beide Felgen nicht schlechthin an einander gelegt, sondern in einander gesteckt werden.

Oben über die Stelle $m\mu\nu n$, wo zwo Felgen in einander verkerbt sind, wird iedesmal ein denen Felgen ähnliches Stück abcd (fig. 37.) wo des Felgens breite Fläche nicht seine Dicke abgebildet ist, gelegt. Dieses Stück abcd heist die **Lasche**, und braucht etwa nur halb so lang und $\frac{2}{3}$ so dick als ein Felgen zu sein. Die Lasche wird so gelegt, daß ihre Mitte gerad in die Mitte zwischen mn und $\mu\nu$ fällt. In dieser Lage werden Lasche und Felgen zusammen durchbohrt und mit starken etwa 1 Zoll dicken hölzernen Nägeln auf einander genagelt,

gelt, wie es die in der 37. fig. bemerkte Punkte andeuten. Diese Befestigung der Felgen unter einander vermittelst der Laschen, heist die **Verlaschung**. Die hölzerne Nägel können dabei drei bis vier Zoll weit von einander abstehn. Die Dicke der Felgen bc (fig. 36.) muß der Größe des Rades und der Größe der Schaufeln angemessen sein. Man wird sie doch allemal zwischen 3 und $4\frac{1}{2}$ Zoll nehmen können. Ihre Breite ab (fig. 37.) braucht nie gar groß zu sein, wenn auch gleich sehr große Schaufeln erfodert werden, weil die Größe der Schaufeln, durch die größere Entfernung beider Kränze von einander, soweit man will verstärkt werden kann, durch die größere Breite der Felgen aber das in den Schaufeln fallende Wasser, des Rades Axe allemal etwas näher liegt, als wenn bei eben dem Umfang des Rades die Felgen schmäler wären, wodurch dann das Moment der Kraft vermindert wird. Es sind auch nicht allemal leicht so starke Krümmlinge zu finden, aus denen sich sehr breite Felgen zubereiten liesen. Daher fällt ihre Breite gewöhnlich zwischen 10 bis 15 Zoll.

4.) Die Verzeichnung der Schaufeln geschieht auf folgende Art. Wenn der ganze Kranz auf dem Radstuhl zusammengefugt ist wie (fig. 38.), so theilt man die Breite der Felgen oder des Kranzes ab in drei gleiche Theile ac, cd, db, und beschreibt durch den ersten von innen d, aus des Rades Mittelpunkt vermittelst einer bei C in einen Zapfen gesteckten Stange einen Kreis, den **Theilriß**, dessen Durchmesser hier eigentlich allemal unter des Rades Durchmesser zu verstehen ist. Dieser Kreis wird in so viele gleiche Theile getheilt, als das Rad Schaufeln bekommen soll. Von iedem dieser abgezeichneten Punkte m werden gerade Linien mn nach dem Mittelpunkt C gezogen, über die der innere Theil der Schaufel, die **Kropf- oder Kiegelschaufel** oder der **Kies** zu stehen kommt. Die Richtung, in der der äusere Theil der Schaufel, die **Stosschaufel**, an den innern stöst, giebt sich dadurch, daß man durch ieden ersten und dritten Theilungspunkt o, m, eine gerade Linie omy über des Kranzesfläche hinauszieht, und solche als die verlangte Richtung annimmt. Um den Durchgang mp für das Wasser in die Schaufel d. i. den **Wassersack** etwas weiter zu erhalten, kann man für die erwähnte Richtung auch die gerade Linie durch den ersten und vierten Theilungspunkt also durch xm annehmen.

Jede Schaufel besteht also aus zwo Bretern dem innern oder dem Kies und dem äusern oder der Stosschaufel (fig. 39.). In der Ausübung läst sich die ganze Schaufel gar bequem aus einem Stück vermittelst der Säge schneiden. An vier Punkten der Stosschaufel a, b, c, d, läßt man vier Zapfen

vorragen, da alsdann der Kranz gehörig durchgebohrt und ausserdem auf seiner Fläche, überall wo die Schaufeln eingesetzt werden sollen, gehörig genuthet, nach der Figur a d e (fig. 39.) wie die Figur vmn fig. 38. zeigt, die mit ade (fig. 39.) einerlei sein muß; Wenn alsdann beide Kränze an die Schaufeln angelegt werden, so müssen die Zapfen a, b, c, d in die Löcher des Kranzes und die Stosschaufel adcb mit der einen Seite bc in die Nuthe my des einen Kranzes und mit der andern Seite ad in die Nuthe des andern Kranzes passen und ebenso muß der Kies d e f c. mit der Seite cf in die Nuthe nn des einen Kranzes, und mit der Seite de in die ähnliche Nuthe des andern Kranzes passen. Zu mehrerer Befestigung wird etwa statt ieder 5ten oder 6ten Riegelschaufel ein ordentlicher parallelepipedischer etwa 5 Zoll dicker Riegel an die Stosschaufel gelegt, der an seinen beiden Enden wie (fig. 40.) eingeschnitten ist, und so durch den Kranz durchgesteckt wird, daß er mit dem einen Zacken wider den innern Umfang des Kranzes anzuliegen kommt, mit dem andern aber in dem Kranz steckt, und also in dem Einschnitt zwischen beiden Zacken ein Stück vom Kranz liegt. Solchergestalt hat iedes Felgen, wenn es nur einen solchen Riegel bekommt, mit den Laschen auf seiner äusern Fläche das Ansehen wie fig. 41, wo an iedem der beiden Enden eine halbe Lasche zu sehen ist; die beiden dicken Striche zeigen die Oberflächen der durchgesteckten beiden Zacken des Riegels. Die Hauptspeigen sowohl als Nebenspeigen müssen bis an den äusern Umfang des Kranzes hinreichen, an die äusere Fläche des Kranzes genau anschliesen, und mit solchem vermittelst starker Nägel und eiserner Schrauben genau verbunden werden.

Die Breite sowohl der Stos- als Riegelschaufel giebt sich aus der Breite der Felgen von selbst, sobald die Anzahl der Schaufeln bestimmt ist. Wollte man mp, oder die Entfernung zweer Schaufeln von einander, sehr groß nehmen, so sieht man leicht, daß sehr vieles Wasser unbenutzt ablaufen müßte. Je kleiner man mp nimmt, desto besser wird das Wasser von den Schaufeln aufgefangen. Weil aber die Schaufeln selbst wegen ihrer Dicke schon einen beträchtlichen Theil des Kranzes wegnehmen, und daher durch die Vielheit der Schaufeln dem einfallenden Aufschlagwasser zuviel Platz versperrt, auch das Rad selbst dadurch übersetzt d. i. durch überflüßige Stücke zu schwer gemacht werden könnte, so macht man mp nicht gerne beträchtlich größer oder kleiner, als die Breite des Kranzes ist. Man dividire also des Rades Umfang d. i. die Länge des Theilrisses durch die Breite des Kranzes; der Quotient giebt die Anzahl der Schaufeln. Nur zur Bequemlichkeit des Werkmeisters verändert man diesen Quotienten gerne so, daß er sich durch 4 genau theilen läßt, damit er nur iedes Radsviertel in eine gewiße Anzahl Theile zu theilen braucht.

Ex.

Ex. Die Anzahl der Schaufeln für ein 28 schuhiges Rad anzugeben, deßen Felgen 13 Zoll breit sein sollen.

Der Durchmesser des Theilrisses wäre also in Zollen $= 28 \cdot 12 = 336$, und der Theilriß selbst $= 3{,}141 \cdot 336 = 1055$ Z. Und nun der Quotient $\frac{1055}{13} = 81$; statt dessen nehme man also die Anzahl der Schaufeln $= 80$, so bekommt ieder Quadrant 20 Schaufeln. Man kann auch die Anzahl der Schaufeln so angeben. Man bestimme den Halbmesser r des Theilrisses in Fusen, und nehme nun die Anzahl der Schaufeln $= 3 \cdot 2r = 6r$. So wäre sie im vor. Ex. $= 6 \cdot 14 = 84$.

Die Länge der Schaufeln de (fig. 39.) die zugleich die Entfernung beider Kränze von einander abgiebt, wird aus (417.) bestimmt. Sie hängt überhaupt von dem erforderlichen cubischen Inhalt der Schaufel, also von der Wassermenge ab, die in iede Schaufel fallen soll, und die sich allgemein so bestimmen läßt.

Des Rades Schaufeln laufen mit einer Geschwindigkeit $= 2\sqrt{gu}$, sein ganzer Umfang ist $= 2\pi r$, wenn des Rades Halbmesser r heist, also hat man

$2\sqrt{gu} : 2\pi r = 1 :$ Zeit einer Umdrehung und es ist also die Zeit eines Umgangs $= \frac{2\pi r}{2\sqrt{gu}} = \frac{\pi r}{\sqrt{gu}}$ Sec. Hat demnach das Rad überhaupt n Schaufeln, so ist

$$\frac{\pi r}{\sqrt{gu}} : 1 = n : \text{Anzahl Schaufeln, die in 1 Secunde gefüllt werden.}$$

Diese Anzahl ist also $= \frac{n\sqrt{gu}}{\pi r}$. Die Wassermenge, die in einer Sec. auf das Rad fällt, heise A, so wird diese Wassermenge auf $\frac{n\sqrt{gu}}{\pi r}$ Schaufeln vertheilt, und es kommt also auf iede Schaufel die Wassermenge

$$H = \frac{A}{n\sqrt{gu} : \pi r} = \frac{A \cdot \pi r}{n\sqrt{gu}}$$

§. 176. (K. §. 417.)

I. Es ist nämlich dieses $W = \frac{A \cdot \pi r}{n\sqrt{gu}}$ was ich (Erl. zu 413 am E.) H genennt hatte.

III. s. im Buch fig. 39.

V. Es wird nämlich vorausgesetzt, es sei cek ein Dreieck $= \frac{s^2 \cdot \text{tang } \theta}{2}$ (415.) welches nicht mehr statt fändte, wenn der Boden der Schaufel fg nicht mehr ganz bedeckt wäre, weil alsdann k in den Boden fg fiele, folglich das Dreieck eck sich alsdann in ein Trapez ekge verwandelte, dessen Inhalt sich nicht mehr durch $\frac{s^2 \cdot \text{tang } \theta}{2}$ ausdrucken liese, sondern besonders gesucht werden müßte. Dieser Fall wird durch (fig. 40. im Buch) vorgestellt und in VII. betrachtet.

VIII. **Dieses macht der Uebergang** ꝛc. Für diesen Fall nämlich, wo die Oberfläche des in der Schaufel liegenden Wassers in der Ebene durch eg liegt, ist es zum letztenmal verstattet, sowohl nach IIII. als nach VII. zu rechnen, da man dann nach (IIII.)

$$\begin{aligned}
\text{tang } \theta &= \frac{(s+q) \cdot x}{s^2} \cdot \frac{T - W}{T} \\
&= \frac{(s+q) \cdot x}{s^2} \cdot \left(1 - \frac{q}{s+q}\right) \\
&= \frac{(s+q) \cdot x}{s^2} \cdot \left(\frac{s+q-q}{s+q}\right) \\
&= \frac{(s+q) \cdot x \cdot s}{s^2 \cdot (s+q)} \\
&= \frac{x}{s}
\end{aligned}$$

wie nach VII. erhält. Sobald die Schaufel am Rad um etwas **höher** steht, geht die Oberfläche des darin befindlichen Wassers noch über die Ecke g und die Rechnung läßt sich also allein nach IIII. so wie gegentheils allein nach VII. führen, sobald die Schaufel am Rad um etwas **niedriger** steht, weil alsdann des Wassers Oberfläche schon **unter** der Ecke g steht (s. Erl. zu V.)

X. Wenn nämlich S den Theil der Schaufel bedeutet, der von ihr für $\theta = 45°$ leer bleibt, weil das Wasser daraus wegen dieser geneigten Lage abschiesen muß, so ist

$$\frac{T}{S} = \frac{s+q}{s^2} \cdot x$$

also

$$\text{also in (IIII.) } \text{tang. } \theta = \frac{T}{S} \cdot \frac{T - W}{T}$$

$$= \frac{T - W}{S}$$

und das giebt

$$S \cdot \text{tang } \theta + W = T \text{ oder } W = T - S \cdot \text{tang } \theta.$$

So dient also die einmal gefundene Größe S, aus dem angegebenen Gewicht T, die in jeder Schaufel liegende Wassermenge W, für jede Lage der Schaufel, die durch θ angegeben wird, so lange nämlich die Oberfläche des Wassers doch noch den Boden der Schaufel bedeckt, zu finden. Es giebt sich aber überhaupt nach (IIII.)

$$W = T \cdot \left(1 - \frac{s^2 \cdot \text{tang } \theta}{x \cdot (s+q)}\right) \quad (\text{X})$$

und nach (VII.)

$$W = T \cdot \left(\frac{\frac{x}{\text{tang } \theta} - s + q}{s + q}\right) \quad (\text{Y})$$

Dieses würde ich nun auf die gewöhnlichen oberschlächtigen Räder so anwenden. Es sei sw (fig. 38.) horizontal. Nun will ich annehmen, es soll nicht mehr Wasser in jede Schaufel fallen, als der cubische Inhalt des Theils der Schaufel, der zwischen dem Boden fe und der Horizontalfläche $s\mu$ liegt, beträgt *); $\frac{s^2}{\alpha\delta}$

*) Ich nehme dieses hier nur so zur Erläuterung der Rechnung an. In der Ausübung hat man die Einrichtung so zu machen, daß die Schaufeln ihr Wasser nicht eher auszugießen anfangen, bis die Riegelschaufel anfängt von Wasser entblößt zu werden. Es muß also der Inhalt des in die Schaufeln fallenden Wassers N höchstens $= t \cdot \Delta fe\delta$ sein, wo t die Länge der Schaufel ist, und es darf daher

$$t \text{ nicht } < \frac{N}{\Delta fe\delta}$$

genommen werden, da man dann bei einer solchen Einrichtung allemal nach h und (427 IIII.) rechnen müßte, ohne daß die Gestalt der Schaufeln die Rechnung abänderte, wie doch geschehen würde, wenn das Wasser in der Schaufel höher als bis $s\mu$ d. i. höher als bis an die folgende Riegelschaufel stünde. Nun ist das Dreieck $fe\delta = \frac{1}{2} fe \times e\delta = \frac{1}{6} sx$, und $T\alpha fe\delta = \frac{fe + \alpha\delta}{2} \cdot x = \frac{\frac{1}{3}s + s}{2} \cdot x = \frac{2}{3} sx$, also darf in der Ausübung $\frac{N}{T}$

$\alpha\delta$ sei gleichfalls horizontal. Stellt man sich nun vor, $\alpha sfe\delta\alpha$ sei ganz mit Wasser angefüllt, so kann offenbar, indem die Schaufel sinkt, nichts von dem in dem Theil $sfe\mu ks$ herausfliesen, bevor das sämmtliche in $\alpha sfe\delta\alpha$ mit enthaltene herausgeloffen ist. Nennt man nun soviel Wasser als in $\alpha fe\delta\alpha$ geht, T und vergleicht nun dieses mit der Schaufel (im Buch fig. 38.) so ist

fig. 38 im Buch	ce	eg	fg	cf
hier	$\alpha\delta$	ev	fe	δe

die fe sehe ich mit sk als gleichlaufend auch asf als gerad an, welches hier wohl verstattet ist. Und nun läßt sich völlig, wie vorhin gezeigt worden, das bei iedem tiefern Stand der Schaufel noch in $\alpha fe\delta$ enthaltene Wasser W berechnen, wenn man nur $\alpha\delta = s$, $ev = x$ und $fe = q$ setzt. Nun muß aber, wenn das Wasser $sfe\mu$ abzulaufen anfangen soll, zuvor der Theil $as\mu\delta$ weggeloffen also $W = sfe\mu$ geworden sein. Das giebt also aus der Formel (☿) hier

$$sfe\mu = T \cdot \left(1 - \frac{s^2 \cdot \text{tang } \theta}{x \cdot (s + q)}\right)$$

folglich, wenn ich $sfe\mu = N$ setze,

$$\frac{N \cdot x \cdot (s + q)}{T} - (s + q) \cdot x = -s^2 \cdot \text{tang } \theta$$

$$\text{und tang } \theta = \frac{(s + q) \cdot x \cdot \left(1 - \frac{N}{T}\right)}{s^2} \quad (\mathfrak{C}$$

welches

$\frac{N}{T}$ nicht $>$ $\frac{\frac{1}{2}sx}{\frac{2}{3}sx}$ oder $\frac{N}{T}$ nicht $> \frac{1}{4}$

sein; und dafern dieses beobachtet wird, hat man sich allemal der Formel ♄ zu bedienen; ist aber $\frac{N}{T} > \frac{1}{4}$ so muß man nach (☿) rechnen.

Hieraus ersieht man, daß die im Ex. angenommene Voraussetzung ein sehr unvollkommenes Rad giebt, weil man daraus $\frac{N}{T} = 0{,}45 \cdots$ findet, da es höchstens $= 0{,}25$ sein sollte, und daß ebendeswegen im Ex. nach (☿) gerechnet werden müsse. Ist übrigens N klein, so, daß für die Voraussetzung $\frac{N}{T} = \frac{1}{4}$ die Länge der Schaufeln $t < 1{,}5$ Fus wurde, so kann man $\frac{N}{T}$ noch soviel kleiner als $\frac{1}{4}$ nehmen, daß $t = 1{,}5$ Fus würde, weil die Räder nicht wohl schmäler sein dürfen.

welches also den Bogen von der Mitte des Kranzes d. i. vom 90ten Grad oder von w (fig. 38.) bis an die Stelle giebt, wo der Theil der Schaufel $sfe\mu$ auszugieſen anfängt, wo also $T - W =$ dem Waſſer in dem Theil der Schaufel $\alpha\delta\mu s$ geſetzt werden müßte. Will man nun wiſſen, wieviel Waſſer von dem $sfe\mu$ noch in der Schaufel in ieder Lage wirklich iſt, ſo giebt ſolches die Formel ☿ oder ♄ und wenn man $W = o$ ſetzt, ſo ergiebt ſich die Stelle, wo das ſämtliche Waſſer ausgeloffen, also die Schaufel völlig leer geworden iſt, aus der Formel (♄.) Für dieſe Stelle iſt also

$$o = T \cdot \frac{\left(\frac{x}{\tang\theta} - s + q\right)}{s + q}$$

folglich auch

$$\frac{x}{\tang\ \theta} - s + q = o$$

$$\text{und } \tang\ \theta = \frac{x}{s - q}$$

Ex. Es ſei $\alpha\delta = 12$ Zoll, $ev = 18$ Z. alſo $fe = \frac{1}{3}\alpha\delta = 4$ Z. (413.), folglich $s = 12$, $x = 18$, und $q = 4$, auch ſei $fs = 10$ und $s\mu = 9$ Zoll *), ſo iſt für die Stelle, wo die Schaufel das Waſſer zu verliehren anfängt, aus (C)

$$\tang\ \theta = \frac{(12 + 4) \cdot 18 \cdot \left(1 - \frac{N}{T}\right)}{12^2}$$

$$= 2 \cdot \left(1 - \frac{N}{T}\right)$$

Nun iſt

$$\frac{N}{T} = \frac{sfe\mu'}{\alpha fe\delta} = \frac{(fe + s\mu) \cdot sf}{(fe + \alpha\delta) \cdot ev} = \frac{(4 + 9) \cdot 10}{(4 + 12) \cdot 18}$$

$$= \tfrac{130}{288} = 0{,}45139$$

$$\text{alſo } \tang\ \theta = 2 \cdot (1 - 0{,}45139) = 0{,}54861$$

$$= \tang.\ 28°45'$$

und

*) Ich nehme dieſe Beſtimmungen hier nur exempelweis an, um die Rechnung zu erläutern, und bekümmere mich alſo nicht darum, ob ſie gehörig zuſammenpaſſen oder nicht.

und die Stelle, wo die Schaufel Waſſer zu verliehren anfängt, liegt alſo über der tiefſten des Rades $90° - 28°45' = 61°15'$.

Nun iſt Cof $61°15' = 0{,}4809888 \cdots$

alſo ſin v $61°15' = 1 - 0{,}480988 \cdots$

$= 0{,}51901 \cdots$ Wäre

demnach des Rades Durchmeſſer $= D$, ſo wäre die vertikale Erhöhung der genannten Stelle über der unterſten $= 0{,}51901 \cdot \frac{1}{2} D = 0{,}2595 \cdot D$ Für die Stelle aber, wo die Schaufel völlig geleert wäre, hätte man

$$\text{tang } \theta = \frac{x}{s-q} = \frac{18}{12-4} = \frac{9}{4} = 2{,}25000$$

welches beinahe $=$ tang $66°2'$ iſt, und dieſe Stelle liegt alſo $90° - 66°2' = 23°58'$ über der tiefſten Stelle des Rades; und weil Cof $23°58' = 0{,}91378 \cdots$ alſo ſin v $= 1 - 0{,}91378 \cdots = 0{,}08621 \cdots$ ſo iſt ihre vertikale Erhöhung über des Rades tiefſter Stelle $= 0{,}08621 \cdot \frac{1}{2} D = 0{,}0431 \cdot D$: Die mittlere Höhe zwiſchen beiden genannten wäre alſo $= \frac{0{,}2595 + 0{,}0431}{2} \cdot D = 0{,}1513 \cdot D$, und man könnte alſo annehmen, die Schaufeln behalten ſämmtlich ihr Waſſer bis an die Stelle, welche um $0{,}1145 \cdot D$ über der niedrigſten Stelle des Rades erhoben iſt, und von da an ſeien die Schaufeln völlig geleert d. i. BF (im Buch fig. 36.) ſei hier $= 0{,}1513 \cdot AB$. Zugleich ergiebt ſich nach der Vorausſetzung, daß die Schaufel mksfeδ nur bis an $s\mu$ mit Waſſer angefüllt ſein ſoll, die Länge der Schaufeln zwiſchen beiden Kränzen, die im Buch t iſt genennt worden. Ihr cubiſcher Inhalt iſt nämlich $= \frac{fe + s\mu}{2} \cdot sf \cdot t$, alſo nach (Erl. 413. am E.)

$$H = \frac{A \cdot \pi r}{n\sqrt{gu}} = \frac{(fe + s\mu) \cdot sf}{2} \cdot t$$

und das giebt

$$t = \frac{2A \cdot \pi r}{n \cdot (fe + s\mu) \cdot sf \cdot \sqrt{gu}};$$

Es iſt aber $\frac{2\pi r}{n} = fs$; alſo

$t =$

$$t = \frac{A \cdot sf}{sf \cdot (fe + s\mu)\sqrt{gu}}$$

$$= \frac{A}{(fe + s\mu)\sqrt{gu}}$$

Es sei $gu = 25$ in Fusen ausgedruckt, und $A = 10$ C. Fus, so wäre im gegebenen Ex. in Zollen

Die Länge der Schaufeln $t = \frac{10 \cdot 12^3}{(4+9) \cdot \sqrt{(25 \cdot 12^2)}}$

$$= \frac{10 \cdot 12^3}{13 \cdot 5}$$

$$= 22,1 \text{ Zoll.}$$

Wäre $gu = 16$, so wäre

$$t = \frac{10 \cdot 12^2}{13 \cdot 4} = 27,7 \text{ Zoll, beinahe } 2\tfrac{1}{3} \text{ Fus;}$$

doppelt so groß wäre t, wenn die Wassermenge in ieder Schaufel nur die Hälfte des erwähnten Theils der Schaufel ausfüllen sollte. Ist die Schwungkraft des Rades beträchtlich, so fängt das Wasser noch etwas eher an auszufliesen, welches in der Folge (427.) näher bestimmt wird.

§. 177. (K. §. 420.)

VII. s. X.

VIIII. s. die Erinnerung in der Erl. zu X.

X. Man kann sich die Sache auf folgende Art begreiflich machen. Die Oberfläche ruhig stehenden Wassers steht überhaupt auf die Richtung, nach der schwere Körper sich selbst überlassen auf die Erde sinken, senkrecht; und so steht also auch die Oberfläche des in der Schaufel bei Q befindlichen Wassers, wenn das Rad stille steht, senkrecht auf QS. Sobald aber das Rad in Bewegung kommt, so daß seiner Schaufeln Geschwindigkeit der Höhe u zugehört, so behalten die Wassertheilgen Q nicht mehr das Bestreben, der Richtung QS parallel zu sinken, sondern die Richtung, nach der sie zu sinken streben, liegt nun in der geraden Linie durch P. Weil die Schaufel nicht ein Punkt ist, so kann man eigentlich nicht alle darin befindliche Wassertheilgen als in Q versammelt ansehen, sondern müßte sich solche, genau genommen, zum Theil in einiger Entfernung von Q gedenken, da dann freilich iedem Wassertheilgen in der Schaufel eigentlich ein besonderes P zugehörte.

Aber wenn man hier das P annimmt, das etwa dem in der Mitte der Schaufel liegenden Wassertheilgen zugehörte, so werden alle denen übrigen in dieser Schaufel befindlichen Wassertheilgen zugehörige P, so nahe an jenes fallen, daß es hier gar wohl verstattet ist, für sie alle das nur erwähnte P allein anzunehmen (VI.) Man kann also sagen: so wie die Oberfläche ruhigstehenden Wassers bei Q, auf die von jedem Punkt in ihr, durch den Mittelpunkt der Erde gezogene Linie, senkrecht ist, so muß die Oberfläche des in der bewegten Schaufel befindlichen Wassers, auf die von jedem Punkt in dieser Oberfläche durch P gezogene Linie, senkrecht sein. Was für die ruhigstehende Schaufel der Erde Mittelpunkt ist, das ist für die bewegte Schaufel der Punkt P, und so wie für die ruhigstehende Schaufel die Oberfläche des Wassers ein Stück einer Kugelfläche ist, die die Linie von ihrer Oberfläche bis zum Mittelpunkt der Erde zu ihrem Halbmesser hat, so kann man die Oberfläche des Wassers in der bewegten Schaufel als ein Stück einer Kugelfläche ansehen, die QP zum Halbmesser hat, daferne nämlich die Länge der Schaufel gegen QP sehr klein ist. Wäre aber die Länge der Schaufel beträchtlich, so wäre die genannte Fläche eigentlich eine Cylinderfläche, sie ist aber doch so ein kleines Stück der ganzen Fläche, daß sie in der Ausübung gar füglich als eine ebene Fläche angesehen werden kann, die demnach auf PQ senkrecht sein muß.

§. 178. (K. §. 421.)

Man könnte ζ auch so finden: Man gedenke sich von Q auf PB ein Perpendikel QM, wo ich den Punkt, worin das Perpendikel die PB trift, mit M bezeichne; so ist $CM = \text{Cof } \varphi$, also $MP = MC + CP = \text{Cof } \varphi + 1$, ferner $QM = \text{sin } \varphi$; nun ist

$$QM : MP = \text{tang } QPC : 1$$

$$\text{also tang } QPC = \frac{QM}{MP} = \frac{\text{sin } \varphi}{\text{Cof } \varphi + 1}$$, dieses unter den Tangenten in den Tafeln aufgesucht, giebt den zugehörigen Winkel QPC und nun hat man $\varphi - QPC = \zeta$.

§. 179. (K. §. 422.)

I. Weil $\text{sin } P = \frac{\text{sin } \zeta}{1}$, so findet man φ am geschwindesten dadurch, daß man in den Tafeln unter den Sinussen den aufsucht, der $= \frac{\text{sin } \zeta}{1}$ da dann dessen zugehöriger Winkel $= P$, und $P + CQP$ oder $P + \zeta = \varphi$ wäre

wäre. Dieſes wird im Buch umſtändlicher aus trigonometriſchen Formeln II. und III. hergeleitet, wo nur μ ſtatt P ſteht.

§. 180. (K. §. 423.)

Je langſamer nämlich das Rad geht, deſto geringer iſt die Schwungkraft, und um ſoviel weniger kann alſo die Richtung der Schwere QS (im Buch fig. 41.) durch die Schwungkraft abgeändert werden, und deſto kleiner muß daher TQS oder QPC werden, folglich deſto gröſſer PQC und die gegenüberſtehende Seite PC oder l, weil PCQ für einerlei Q ungeändert bleibt. Anfänger müſſen, um bei einer Unterſuchung überall deutliche Begriffe zu erlangen, ſich nicht allemal damit begnügen, daß ſie überſehen, wie ein Reſultat aus der Rechnung folgt, ſondern ſie müſſen zuweilen ihren Calcul mit philoſophiſchen Schlüſſen vergleichen, und ſehen, wie ein ſolches Reſultat, das die Rechnung giebt, mit der Natur der Sache ſelbſt zuſammenhängt. Durch dergleichen philoſophiſche Schlüſſe laſſen ſich auch oft Unterſuchungen merklich erleichtern, nur müſſen ſie mit beſonderer Sorgfalt geführt werden, worüber ich mich ſchon in der Erläut. d. An. d. Un. erklärt habe.

§. 181. (K. §. 424.)

Wenn nämlich Q die Stelle des Umfangs iſt, die in der durch den Mittelpunkt C gehenden Horizontallinie liegt, ſo wird da $\varphi = 90° = R$ und $\sin \varphi = 1$, folglich auch QCPQ ein rechtwinklichtes Dreieck, wo $QP = \sqrt{(QC^2 + PC^2)} = \sqrt{(1 + l^2)}$, das giebt alſo $\sin CQP$ oder

$$\sin \zeta = \frac{l \cdot \sin \varphi}{QP} \text{ (421. V.)} = \frac{l}{\sqrt{(1 + l^2)}}$$

§. 182. (K. §. 427.)

I. **Mit dem Rade macht** ꝛc. nämlich mit der Tangente am Umfang des Rades an die Stelle gezogen, wo die Oberfläche des Waſſers den Umfang des Rades ſchneidet. Auf ſolche Art ſtellt ekc den Winkel vor, der (im Buch fig. 42.) EQH war, iſt alſo ζ, und weil $keC = R$ iſt, ſo hat man eck oder $\theta = R - \zeta$.

§. 183. (K. §. 431.)

IIII. Da hier der Inhalt der Schaufeln 2,625 die darin enthaltene Waſſermenge aber 0,326 Cub. F. ſo füllt ſolche etwa nur den 8ten Theil der ganzen Schaufel aus, da ſolche in meiner (417.) geführten Berechnung etwa die Hälfte der ganzen Schaufel ausfüllte. Es iſt daher nicht befremdend, daß

dort die Schaufeln sehr viel früher ausgiesen als hier. Da übrigens hier das Wasser nur so einen kleinen Theil der Schaufel ausfüllt, so daß beim Anfang des Ausgiesens, gewiß nicht mehr der ganze Schaufelboden bedeckt ist, so hätte, wie mich dünkt, das Ex. im Buche nicht nach (417. IIII.) sondern nach (417. VII.) berechnet werden müssen. Auf solche Art fändte man

$$\text{tang } \theta = \frac{7 : 6}{1 - \frac{1}{2} + \frac{(1 + \frac{1}{2}) \cdot 0,326}{2,625}} = 1,700 \cdot \cdot$$

welches tang 59° 32′ ist. Also $\theta = 59° 32'$, und $R - \theta = 30° 28'$. Nun ist Cos 30° 28′ = 0,86192 · also sin v = 1 — 0,86192 = 0,13807; und die vertikale Erhöhung der Stelle, wo das Wasser auszugiesen anfängt, über B (im Buch fig. 36.) = 0,13807 · $\frac{1}{2}$D = 0,138 · 20,5 = 2,83 Fus, welches also (bei fig. 39. im Buch) die KB ist. Nun hat man für die Stelle, wo alles Wasser ausgeloffen ist, nach Erl. zu 417.

$$\text{tang } \theta = \frac{x}{s - q} = \frac{7 : 6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{7}{6 \cdot \frac{1}{2}} = 2,3333 \cdot \cdot \cdot$$

welches tang 66° 48′ ist, also $\theta = 66° 48'$ und die gesuchte Stelle F (unter fig. 39. im Buch.) liegt also um 23° 12′ über B. Es ist aber Cos 23° 12′ = 0,91913 · · also sin v 23° 12′ = 1 — 0,91913 = 0,08086, und daher BH = 0,08086 · $\frac{1}{2}$D = 0,04043 · D = 0,04043 · 41 F. = 1,6564 F. und KH = KB — HB = 2,83 — 1,656 = 1,174 statt 1,670 Fus.

VIII. Weil $\theta = 59° 32'$ und nicht = 56° 52′ (Erl. zu IIII.) so ist $\zeta = R - \theta = 30° 28'$ und nun

log tab · sin ζ = 9,7050397
Abgez. log tab · 1 = 0,5055213
log tab sin μ = 9,1995184

Dieses in den Tafeln unter den Logarithmen der Sinuße aufgesucht, giebt den zugehörigen

Winkel μ beinahe = 9° 6′
addirt ζ = 30° 28′
giebt φ = 39° 34′

VIIII.

VIIII. Die vertikale Höhe der Stelle, wo die Schaufeln auszugiesen anfangen, über der untersten B, wäre nun nach Erl. zu (VIII.) = (1 — Cos 39° 34′) · 20,5 = 0,229116 · 20,5 = 4,696 Fus statt 5,494 Fus. Den Werth von BH habe ich schon bei (IIII.) = 1,656 angegeben, und die vertikale Höhe der vorigen Stelle über H d, i. KH ist nun = KB — BH = 4,696 — 1,656 = 3,04 Fus statt 3,837 F. Werden also die beiden Werthe von KH

1.) der in IIII. wo man das Ausgiesen der Schaufel, nur insoferne solches blos durch die Lage der Schaufel

2.) der in VIIII. wo man das Ausgiesen, zugleich insoferne solches durch die Schwungkraft verursacht wird, betrachtet,

gehörig korrigirt, so kommt der korrigirte in (IIII.) der **Elviusschen** Angabe um 6 Zoll und der korrigirte in (VIIII.) um etwas über 9 Zoll näher, als die im Buch berechneten Werthe.

§. 184. (K. §. 433.)

s. H. Hofr. **Karstens** Lehrbegr. der gesamme. Mathem. VI. B. Hr. Prof. **Mönnichs** Anleitung zur Anordnung und Berechnung der gebräuchlichsten Maschinen Ite Abtheil. Des neulich verstorbenen Hrn. Prof. **Eberhards** neue Beiträge zur Matheſi appl. Des schon oft erwähnten **Belid.** Archit. hydr. und H. Oberk. **Cancrinus** Bergmaschinenkunst.

§. 185. (K. §. 434.)

I. Da aus Versehen hier gleich anfangs ein falscher Satz zum Grund gelegt wird, so sind die sämmtlichen Sätze bis (438.) unbrauchbar, und ich werde daher solche näher zu berichtigen suchen.

einerlei sein ꝛc. dieses ist falsch. Soviel ist wahr, daß die Oberfläche des Sphäroids den nämlichen Strahl auffängt, den seine Grundfläche als die zum Halbmesser PM gehörige Kreisfläche auffangen müßte, wenn der Strahl unmittelbar gegen solche stosen könnte. Aber gegen diese Kreisfläche stiese der Strahl senkrecht, und gegen die Oberfläche des Sphäroids schief, und desto schiefer, ie weiter die Stelle, welche gestosen wird von A liegt, also muß eben der Strahi weniger Gewalt gegen die sphäroidische Oberfläche als gegen die erwähnte Grundfläche ausüben, oder der erstere Stos ist schwächer als der letztere.

II. s. die Erl. zu I.

III

III. Die Größe des Stoßes auf die sphäroidische Oberfläche zu finden, ist die Vergleichung mit 341 allerdings zu gebrauchen, nur auf eine andere Art. Es ist nämlich für den Stos auf die mit Mm beschriebene Zone

in 341.	Z^2	$\sin\theta$
hier	$2\pi y\,ds$	$\frac{dy}{ds}$

für den Stos auf den mit mR beschriebenen Ring.

in 341.	Z^2	$\sin\theta$
hier	$2\pi y\,dy$	1

Und es ist (342.)

$$\text{senkrechte Stos auf die Zone} : \text{senkrechten Stos auf den Ring} = A \cdot \frac{dy}{ds}\sqrt{\frac{v}{g}} : A \cdot 1 \cdot \sqrt{\frac{v}{g}} = dy : ds$$

Ich will dieses kurz so ausdrucken

$$d\zeta : d\varrho = dy : ds$$

wo ich den Stos auf die ganze von AM erzeugte sphäroidische Fläche ζ, und den auf die ganze von PM erzeugte Kreisfläche ϱ nenne, folglich $d\varrho$ den Stos auf den unendlich schmalen Ring und $\delta\zeta$ den Stos auf die unendlich schmale Zone bedeutet. Man hat demnach auch

$$d\zeta : d\varrho = 2\pi y\,dy : 2\pi y\,ds$$
$$\text{und } \zeta : \varrho = \int 2\pi y\,dy : \int 2\pi y\,ds = \pi y^2 : \int 2\pi y\,ds$$

Nun ist πy^2 der Inhalt der zum Halbmesser PM gehörigen Kreisfläche, und $\int 2\pi y\,ds =$ dem Inhalt der zum Bogen AM gehörigen sphäroidischen Oberfläche (An. d. Un. 606.) also hat man allgemein:

$$\left\{\begin{matrix}\text{der Stos auf die}\\ \text{Oberfläche des}\\ \text{Sphäroids } (\zeta)\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{Stos auf die}\\ \text{Grundfläche des}\\ \text{Sphäroids}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{Inhalt der}\\ \text{Grund-}\\ \text{fläche}\end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix}\text{Inhalt der}\\ \text{Oberfläche}\end{matrix}\right\}$$

Er. 1.) Will man demnach den Stos auf ein paraboliſches Sphäroid, deſſen Axe auf der Grundfläche ſenkrecht und der Richtung des Waſſerſtrahls gleichlaufend verſtanden werden muß, angeben, ſo berechne man den Stos auf ſeine Grundfläche, und ſuche den Inhalt der Grundfläche ſowohl als der Oberfläche (An. d. Un. 607), beide letztere durch einander dividirt giebt einen eigentlichen Bruch, der mit dem Stos auf die Grundfläche multiplicirt den Stos auf die ſphäroidiſche Oberfläche giebt.

2.) Die

2.) Die senkrechte Höhe eines Kegels von der Spitze bis auf die Grundfläche, die ein auf des Kegels Axe senkrechter Kreis sein muß, sei = h, der Halbmesser seiner Grundfläche = r, so ist seine Grundfläche = πr^2, seine Oberfläche = $\pi \cdot 2r \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(r^2 + h^2)} = \pi r \sqrt{(r^2 + h^2)}$ und der Stos auf die Grundfläche = $A \sqrt{\frac{v}{g}}$ (342) also der Stos auf die Oberfläche des Kegels, der mit seiner Spitze dem Strohm entgegen und dessen Axe in der Richtung des Strohms liegt, =

$$\frac{\pi r^2}{\pi r \sqrt{(r^2 + h^2)}} \cdot A \sqrt{\frac{v}{g}} = \frac{rA \sqrt{\frac{v}{g}}}{\sqrt{(r^2 + h^2)}}$$

3.) AM sei ein Quadrant, also AP sein Halbmesser, so ist das Sphäroid eine Halbkugel, und die Oberfläche der Halbkugel = $2\pi r^2$ (K. Geom 65 S. 2 Zus.) und ihre Grundfläche = πr^2, folglich der Stos auf die Oberfläche der mit ihrer Axe der Richtung des Strohms parallel entgegengesetzten Halbkugel =

$$\frac{\pi r^2}{2\pi r^2} \cdot A \sqrt{\frac{v}{g}} = \frac{1}{2} A \sqrt{\frac{v}{g}}$$

also gerad halb so groß als auf die Grundfläche.

§. 186. (K. §. 436.)

Dieser Satz bleibt richtig, wenn gleich (434.) durchaus falsch ist, weil aus (Erl. 434 III.) doch soviel erhellet, daß sich der Stos auf der Kugel Oberfläche, wie der auf die größte Kreisfläche verhält.

§. 187. (K. §. 437.)

II. Weil 334; 335; falsch sind, so muß die Formel hier gleichfalls gehörig verbessert werden. Nach (Erl. 334. III. 3 Ex.) ergiebt sich nämlich der

$$\text{Stos} = \frac{\frac{D^2}{4} \pi \cdot \lambda \cdot v}{2} = \frac{D^2 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot v}{8}$$

IIII. Wegen Erinnerung zu (II.) muß man folgende Proportion annehmen

$$\frac{D^3 \pi}{6} \cdot p : \frac{D^2 \pi}{8} \cdot \lambda v \cdot (p - q) = p : (p - q) \cdot \frac{3}{4} \frac{\lambda v}{D}$$

V. Aus Erinnerung bei (IIII.) folgt hier

$$(p - q) \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \frac{\lambda v}{D} = q \cdot \text{tang } \alpha$$

und $v = \dfrac{4D \cdot \text{tang } \alpha \cdot q}{3\lambda \cdot (p - q)}$

also der Weg in einer Sec.

$$= 2\sqrt{\frac{4g \cdot D \cdot \text{tang } \alpha \cdot q}{3\lambda \cdot (p - q)}}$$

$$= 4\sqrt{\frac{gD \cdot \text{tang } \alpha \cdot q}{3\lambda \cdot (p - q)}}$$

VI. Statt **Kreisfläche** lese man hier nur **Kugelfläche**, so folgt aus (V.) unmittelbar der Weg in einer Sec. für $\lambda = 1$ (nicht $\lambda = \frac{1}{2}$, welches auch eine Voraussetzung ist, die meines Wissens Niemand noch angenommen hat)

$$= 4\sqrt{\frac{gD \cdot \text{tang} \cdot \alpha \cdot q}{3 (p - q)}}$$

Also ist bei der **Elviusschen** Formel wirklich $\lambda = 1$ zum Grund gelegt, wie sich auch nach Erl. zu (135.) gehört. Wirklich behält also die **Elviusschе** Formel nach der Theorie ihre Richtigkeit, nur ist solche im Buch aus unrichtigen Voraussetzungen hergeleitet worden, welches Hr. Hofr. zuverläßig gleich nach dem Abdruck seines Buchs so gut eingesehen hat, als sein Kommentator.

§. 188. (K. §. 438.)

einen andern **Werth** *zum voraus* ꝛc. Dieser Vorwurf trift **Elviusen** deswegen nicht, weil es nicht wahr ist, daß Elv. bei seiner Formel $\lambda = \frac{1}{2}$ genommen habe. Es liegt wirklich $\lambda = 1$ bei seiner Formel zum Grund, welches Hrn. **Eulers** Verlangen völlig gemäß ist. Und so giebt also auch diese Betrachtung eben keinen neuen Beweis von der Unsicherheit der bisherigen Untersuchungen ab, sondern dient vielmehr in mancher Absicht zu ihrer Bestätigung.

So wichtig nun der gleichfolgende dritte Abschnitt ist, so kurz werden doch meine Bemerkungen dabei sein, weil sich die meisten Sätze und Rechnungen ohne weitere Erläuterungen leicht verstehen lassen. Es kommt hierbei hauptsächlich nur auf die schon in der höhern Mechanik vorgetragenen allgemeinen Lehren an,

auf

auf deren verschiedenen Anwendungen zugleich die Verschiedenheit derer von den größten Mathematikverständigen d'Alembert, Dan. und Joh. Bernoulli, Newton, Maclaurin, Euler, Kästner und Karsten aufgestellten Theorien beruhet. Die Gedanken dieser Männer findet man in dem klaßischen Werk des H. Hofr. Karstens von der vortheilhaftesten Anordnung der Feuersprützen vorgetragen, erläutert, aus einander gesetzt, mit einander verglichen und auf eine höhere Stufe der Vollkommenheit erhoben. In der That giebt dieses Karstensche Werk, zu dem letzt folgenden 3ten Abschnitt, zugleich den herrlichsten Kommentar ab, und um soviel mehr bin ich berechtigt, dabei nur ganz kurz zu sein.

§. 189. (K. §. 452 = 454.)

und Gestalt des Gefässes ändern ꝛc. Hierher gehört auch Erl. zu (169.). Gegen die Anwendung mechanischer Formeln auf plötzliche Veränderungen der Geschwindigkeit, macht H. H. Karsten a. a. O. billige Erinnerungen, weil dergleichen Formeln sich überall auf die Voraussetzung unendlich kleiner Aenderungen gründen.

§. 190. (K. §. 455.)

XI. Der Druck der Last ꝛc. Dieses mögte wohl nicht überzeugend genug ausgedruckt sein. Ein Körper, der auf einem andern liegt, drückt diesen andern, so lange beide ruhig liegen; sobald man den untern fallen läßt, wird der obere mit gleicher Geschwindigkeit nachfolgen, aber nun auf den untern zu drucken aufhören, weil die relative Geschwindigkeit des obern gegen den untern = o ist, wie (349.). Aber der Unterschied zwischen diesem Fall und dem hier im Buch ist folgender. Der untere von den beiden Körpern hat allemal wegen seiner Schwere die Stelle schon verlassen, in die der obere tritt; dadurch wird also der Druck des obern Körpers auf den untern allerdings = o; aber das unter HI befindliche Wasser kann nicht wegen seiner Schwere dem über HI befindlichen Wasserkörper ausweichen, sondern muß erst durch solchen den ganzen Druck bekommen, daß es solchem nachher geschwind genug ausweichen kann.

§. 191. (K. §. 472.)

An den Strudel braucht man zwar beim Gebrauch der bisherigen Formeln nicht weiter zu denken, aber die Richtigkeit dieser Formeln ist doch wohl auf die Voraussetzung eines Strudels gegründet; sie setzen stillschweigend, ohne daß man dran zu denken braucht, voraus, das Wasser bilde beim Ausfluß zu-

vor einen Strudel, vermittelst dessen sich die Geschwindigkeit denen gebrauchten Formeln gemäß, nach dem Gesetz der Stetigkeit ändern kann. Und diese Vorstellung des Strudels, scheint auch in der That nicht einmal unter die mathematischen Fiktionen zu gehören, sondern der Natur der Sache selbst völlig angemessen zu seln. Ich halte mich hierbei nicht weiter auf, sondern beziehe mich nur auf die angeführte Karstensche Schrift §. 41 - 44.

§. 192. (K. §. 481.)

s. die Vorr. zu H. H. Karstens Lehrbegr. der ges. Mathem. V. B. wo man zugleich die hierhergehörigen Sätze zur Erläuterung des Gegenwärtigen nachschlagen kann.

§. 193. (K. §. 484.)

Ich habe hierbei eben die Zweifel, wie bei (169.). Es bleibt richtig, daß $z = (a + b \cdot \sin\beta) \cdot \left(\frac{h^2}{h^2 - m^2}\right)$ aber hier darf unter m nicht die Weite der Oefnung bei BC verstanden werden, sondern der Querschnitt des Strahls in dieser Oefnung, der von dem Querschnitt des Strahls in der Oefnung GD verschieden sein muß. Weil nämlich das Wasser durch BC schneller als durch GD fließt, so müssen sich die Grössen der Querschnitte des Strahls bei GD und BC umgekehrt wie ihre Geschwindigkeiten an diesen Stellen verhalten, und wenn also die Oefnung GD, m heißt, so muß man den Querschnitt bei BC $< m$ setzen, daher ich ihn durch m' ausdrucken will, und die für iede Sec. aus BC fliesende Wassermenge, ist nicht das Produkt aus der Geschwindigkeit bei BC in m, sondern in m', oder auch welches eben das ist, das Produkt aus der Geschwindigkeit bei GD in m. Wenn indessen, indem die Röhre bei BC geöfnet wird, das Wasser wirklich die ganze Oefnung BC ausfüllt, so rührt das, wie ich oben mehrmals erinnert habe, nur vom Druck der Atmosphäre her, und würde sich im luftleeren Raum anders verhalten. Aber wenn auf solche Art der Strahl bei BC so dick lauft wie bei GD, so folgt daraus, daß das Wasser alsdann durch GD schon mit eben der Geschwindigkeit fliesen müsse, mit der es durch BC fließt, wenn beide Oefnungen gleich groß sind, und daß also der Geschwindigkeit des durch GD fliesenden Wassers gleichfalls die Höhe

$$z = (a + b \cdot \sin\beta) \cdot \left(\frac{h^2}{h^2 - m^2}\right)$$

zugehören müsse; die Bewegung durch GD wird solchergestalt beschleunigt, und bleibt hernach durch die ganze Röhre gleichförmig, wenn die Röhre gleichweit ist.

§. 194

§. 194. (K. §. 491.)

nicht nöthig ꝛc. nämlich ſich den Strudel gehörig vorzuſtellen, aber doch wohl nöthig, ihn ſtillſchweigend vorauszuſetzen.

§. 195. (K. §. 493.)

aber dieſe Zeit ꝛc. Solche zu beſtimmen, dienen dergleichen Betrachtungen wie (Erl. zur höh. Mechan. §. 98.) Man ſetze $a \cdot \left(\frac{h^2}{h^2 - m^2}\right)$ ſtatt des dortigen v, und die Länge der horizontalen Röhre gleichfalls $= a \cdot \left(\frac{h^2}{h^2 - m^2}\right)$ (weil dorten $f = a$ iſt angenommen worden,) ſo hat man für die Zeit t, in der das Waſſer in der Röhre die Geſchwindigkeit v erhält,

$$t = 0{,}0125 \cdot \sqrt{\left(a \cdot \frac{h^2}{h^2 - m^2}\right)} \text{ Sec.}$$

wo alles in Tauſendtheilgen eines Rhl. Fuſes ausgedruckt werden muß.

Ex. Es ſei $h = 2$ Quadr. Fus, $m = 1$ Q. Zoll $= \frac{1}{144}$ Q. Fus, ſo läßt ſich die Gröſſe unter dem √ ohne Irthum $= a$ ſetzen; nun ſei $a = 9$ Fus alſo in Tauſendtheilgen $= 9000$, ſo hat man $t = 0{,}0125 \cdot \sqrt{9000}$; es iſt aber

$$\begin{aligned} l\ 0{,}0125 &= 2{,}0969100 - 4 \\ \text{Add. } \tfrac{1}{2}\, l\ 9000 &= 1{,}9771212 \\ \text{giebt } lt &= 3{,}0740312 - 3 \\ \text{alſo } t &= 1{,}186 \text{ Sec.} \end{aligned}$$

Um ſoviel alſo kann man rechnen, daß das Waſſer im Gefäß mit der angegebenen horizontalen Röhre ſeine größte Geſchwindigkeit v ſpäter erreichen werde, als ohne die Röhre.

§. 196. (K. §. 516.)

Für $h^2 = 2m^2$ iſt (§ 10.) $k = 1$, alſo nach (§ 11.)

$$\begin{aligned} z &= -myh^2 \cdot S \\ &= -m \cdot (mw + hb) \cdot h^2 \cdot S \\ &= (-m^2wh^2 - mh^2b) \cdot S \end{aligned}$$

Weil aber hier b = o ſein ſoll, ſo hat man aus (510.) hier

$$S = \frac{1}{m^4} \cdot \log. \frac{w}{a}$$

$$\text{alſo} \quad z = \frac{-m^2 w h^2}{m^4} \log \frac{w}{a}$$

$$= \frac{m^2 w \cdot h^2}{m^4} \log \frac{a}{w}$$

$$= \frac{w h^2}{m^2} \cdot \log \frac{a}{w}$$

aber $h^2 = 2m^2$ alſo $\frac{h^2}{m^2} = 2$ und daher $z = 2w \log \frac{a}{w}$. Für den einzigen Fall alſo, wenn $\frac{h^2}{m^2} = 2$ oder $h = m\sqrt{2}$ iſt, wird z durch Logarithmen gegeben. Mir iſt hierbei die artige Bemerkung beigefallen, daß alſo in der Anwendung der Werth von z gerad in dem Fall nur logarithmiſch wird, wenn die Weite des Gefäßes ſo groß als die Weite der Oefnung iſt. Man darf nämlich in allen bisherigen Rechnungen bei der Anwendung nie den Werth von m ſelbſt, ſondern $\frac{m}{\sqrt{2}}$ ſtatt m gebrauchen, wenn man Bern. (142.) folgt. Oder man ſollte unter m eigentlich nicht die Weite der Oefnung, ſondern den Querſchnitt des zuſammengezogenen Waſſerſtrahls verſtehen; heiſt nun dieſer m', ſo iſt nach B. $m = m'\sqrt{2}$ und wenn man alſo $h = m$ hat, ſo hat man $h = m'\sqrt{2}$ und für dieſen Fall $z = 2w \log \frac{a}{w}$

§. 197. (K. §. 517.)

Aus $\frac{k+1}{k} \cdot w = \left(w - \left(\frac{w}{a}\right)^k \cdot a\right) \cdot \frac{k+1}{k-1}$ folgt

$$\frac{k+1}{k} = \left(1 - \frac{w^{k-1}}{a^{k-1}}\right) \cdot \frac{k+1}{k-1}$$

$$\text{oder} \quad \frac{1}{k} = \frac{1 - \frac{w^{k-1}}{a^{k-1}}}{k-1} \quad \text{alſo} \quad \frac{1-k}{k} = \frac{w^{k-1}}{a^{k-1}} - 1$$

oder

oder $\frac{1}{k} - 1 + 1$ d. i. $\frac{1}{k} = \frac{w^{k-1}}{a^{k-1}}$ also

$$w = \frac{a}{\sqrt[k-1]{k}}$$

Die der größten Geschwindigkeit zugehörige Höhe giebt sich aus $\frac{z}{w} = \frac{k+1}{k}$ nämlich

$$z = \frac{w \cdot (k+1)}{k}$$

woraus sich, den nur gefundenen Werth von w gesetzt,

$$z = \frac{a}{\sqrt[k-1]{k}} \cdot \frac{k+1}{k}$$

ergiebt.

§. 198. (K. §. 529.)

Aber die Erinnerungen bei 169 finden auch hier statt.

§. 199. (K. §. 532.)

Es bedeutet nämlich e die Zahl, deren natürlicher Logarithme = 1 ist, man hat also $\log \frac{a}{a-z} = \frac{x}{b} = \frac{x}{b} \text{le}$, oder $\log \frac{a-z}{a} = -\frac{x}{b} \text{le} = \text{le}^{-x:b}$, mithin $\frac{a-z}{a} = e^{-x:b}$ und $z = a - a \cdot e^{-x:b}$

§. 200. (K. §. 544.)

Es versteht sich, daß das Gefäß beständig voll erhalten wird. Ich denke aber nicht, daß die Formel für den Druck, wie sie hier im Buch angegeben ist, aus völlig überzeugenden Gründen hergeleitet ist. Daß das durch die Oefnung fliesende Wasser in seiner Figur erhalten wird, ist wahr. Es rührt aber solche Erhaltung eigentlich von der Geschwindigkeit her, mit der das Wasser durch GD fließt; diese Geschwindigkeit hervorzubringen, wird die beschleunigende Kraft durch den Strudel erfodert, deren Wirkung also eigentlich angewandt wird 1.) das Wasser durch GD zu treiben 2.) die Figur DI zu erhalten. Ich glaube daher, daß der Druck, den der noch vorhandene Theil des Bodens $h - m$ **wegen der Bewegung des Wassers** leidet, nur einen Theil der beschleunigenden Kraft, nämlich nur $\frac{h-m}{h}$ derselben gleichgesetzt werden

den könne. H. H. Karsten macht daher gegen diesen Satz gleichfalls verschiedene Einwendungen (Lehrbegr. der ges. Math. 213. §.) und bringt am Ende seiner Rechnung eine Formel heraus, die weder mit der Bernoullischen noch mit der Kästnerischen übereinstimmt. Wenn w die Länge des ausgeloffenen Wassercylinders (wie x 496.) und n das, was hier im Buch m, bedeutet, so findet H. H. Karsten den Druck auf den noch vorhandenen Theil des Bodes, der = h — n ist,

$$= a h \cdot \frac{h - n}{h + n} \cdot \left(1 - e^{\frac{(n^2 - h^2) \cdot w}{hna}}\right)$$

Im Buch ist

$$E = e^{\frac{\alpha k t}{ma}} = e^{2 t \sqrt{\left(\frac{h^2 - m^2}{am^2}\right)} \cdot g} \quad (467.\ II.\ u.\ 470.)$$

Demnach aus der Formel im Buch der Druck auf den Boden =

$$ah \cdot \frac{e^{2 t \sqrt{\left(\frac{h^2 - m^2}{am^2}\right)} \cdot g} - 1}{e^{2 t \sqrt{\left(\frac{h^2 - m^2}{am^2}\right)} \cdot g} + 1}$$

Für den Anfang der Bewegung wird in der Karstenschen Formel w = o, und in der Kästnerischen t = o

also der Druck für den Anfang der Bewegung

I. nach der Kästnerischen Formel $= ah \cdot \left(\frac{1 - 1}{1 + 1}\right)^2 = o$

II. nach der Karstenschen $= ah \cdot \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{h^2 \cdot o}{ma}}}\right) = ah \cdot \left(1 - \frac{1}{1}\right) = o$

III. nach der Bernoullischen $= a h + o = a h$

Konnte man aber nicht schon zum voraus wissen, daß hier der Druck auf den Boden sich = a · (h — m) finden müßte? Denn da hier t = o ist, so verlangt in diesem Fall die Aufgabe eigentlich weiter nichts, als den blos hydrostatischen Druck des auf die Höhe a mit Wasser angefüllten Gefäßes auf den

den Boden h — m, der dann bekanntlich = a · (h — m) ist. Für den Anfang der Bewegung ist nämlich die beschleunigende Kraft durch den Strudel = o, wie schon aus (455. VI.) erhellet, wo für diesen Fall die Geschwindigkeit v = o gesetzt werden muß. Den Druck auf den Boden zu finden, muß also in diesem Fall zuverläßig noch a · (h — m) zur beschleunigenden Kraft durch den Strudel addirt werden. Also ist wenigstens für den Fall, wenn t und m unbeträchtlich ist, ohnstreitig die Bern. Formel zu gebrauchen, weil da a · (h — m) = ah ist; allgemein aber für iedes m, dafern t nur unbeträchtlich ist, wäre der Druck offenbar = a · (h — m). Ueberhaupt scheint für iedes t die Größe a · (h — m) als eine Const. in die Formel für den Druck zu gehören, damit solche auch für t = o den Druck auf den Boden gehörig gebe. Ich dächte, er liese sich nach meinen vorigen Erinnerungen so ausdrucken: =

$$a \cdot (h - m) + \frac{h + m}{h} \cdot \left(ah \cdot \left(\frac{E - 1}{E + 1} \right)^2 \right)$$

$$= a \cdot (h - m) + (h - m) \cdot a \cdot \left(\frac{E - 1}{E + 1} \right)^2$$

$$= a \cdot (h - m) \cdot \left(1 + \left(\frac{E - 1}{E + 1} \right)^2 \right)$$

und das gäbe wirklich die Bern. Formel, nur h — m statt h d. i. nur den noch vorhandenen Theil des Bodens statt des ganzen gebraucht. B. Formel gäbe den Druck auf den ganzen Boden h, man sucht aber nur den auf h — m. Daß B. die Fläche des ganzen Bodens so schlechthin in die Rechnung führt, kommt Hrn. Hofr. selbst bedenklich vor. (548.)

§. 201. (K. §. 550 — 552.)

Der Werth der beschleunigenden Kraft (455. XIII.) d. i. von $\frac{mdv}{2ghdt}$ ergiebt sich schon unmittelbar aus der Formel (456.) verglichen mit (458.) Warum hier in (550 — 552.) durch einen Umweg das erst wieder gesucht wird, was man (456.) schon hat, sehe ich nicht, und vermuthe, daß H. Hofr. überhaupt die Sätze (549 — 554.) nur als eine Wiederholung hier hat beibringen wollen, da sie eigentlich keine neue Untersuchung abgeben.

§. 202. (K. §. 574.)

also erhellet, daß er ꝛc. Ich dächte nicht, daß sich dieses schliesen liese. Die Voraussetzung eines Strudels heißt doch wohl nur soviel, als die Voraussetzung einer solchen Gestalt des durchfliesenden Wassers, wobei sich seine Querschnitte, folglich auch seine Geschwindigkeiten, nach dem Gesetz der Stetigkeit ändern, auf das sich die gebrauchten Formeln gründen. Eine solche Gestalt aber wird hier vom ganzen Gefäß angenommen.

§. 203. (K. §. 606. 607.)

Daß Polenis Versuche nicht wohl hierher passen, ist mir gleich beigefallen, weil hier eigentlich gewiesen werden soll, was die Abänderung der Richtung der centrischen Linie auf den Ausfluß für eine Wirkung hat, diese Richtung aber durch die Umkehrung der kegelförmig durchlöcherten Platte bei Polenis Versuche keine Aenderung gelitten hat. Der Zweifel (605.) aber wird durch (607.) völlig gehoben. Wenn m den auf die centrische Linie senkrechten Querschnitt der Röhre beim Ausfluß bedeutet, so ist allemal $\omega = m\alpha$, die Richtung der centrischen Linie mag nun mit dem Horizont einen Winkel machen, welchen man will, folglich auch selbst horizontal sein. Nun ist (598.)

$$z = \frac{a}{1 - \left(\frac{\beta\omega}{\alpha h}\right)^2} \text{ also } = \frac{a}{1 - \left(\frac{\beta m\alpha}{\alpha h}\right)^2}$$

$$= \frac{a}{1 - \frac{\beta^2 m^2}{h^2}} = \frac{ah^2}{h^2 - \beta^2 m^2}$$

Bei Polenis Versuch war aber gewiß $\beta = 1$; hat also, wie sich hier annehmen läßt, ω (605.) die Bedeutung wie m (607.), so sieht man, wie B. mit Recht $z = \frac{h^2 a}{h^2 - \omega^2}$ bei dem Polenischen Versuch gebrauchen durfte. Hat Ee d. i. h eine beträchtliche Grösse gegen Cc d. i. ω, so kann man allemal Ee als horizontal betrachten also $\beta = 1$ setzen, und so hätte man also für dergleichen Fälle allemal

$$z = \frac{ah^2}{h^2 - m^2}$$

§. 204.

§. 204. (K. §. 608.)

dem Querſchnitte ꝛc. nämlich dem auf die Axe der Röhre ſenkrechten Querſchnitte.

§. 205. (K. §. 615.)

Man ſetze noch hinzu:

dorten	y
hier	r

§. 206. (K. §. 627.)

vertikal wird ꝛc. eigentlich: damit ihre centriſche Linie in eine vertikale Ebene fällt.

§. 207. (K. §. 629.)

Für ein beſtändiges z wird nämlich $\frac{dz}{dx} = 0$.

§. 208. (K. §. 636.)

durchflieſenden Waſſer leidet ꝛc. Aber wird auch der **ganze Druck** des in der Röhre befindlichen Waſſers, von deſſen Wirkung das Waſſer zum Durchflieſen genöthigt wird, zugleich auf das um den Strudel herum ſtillſtehende Waſſer angewandt oder **nur ein Theil** deſſelben? ſ. die Erl. zu 544. Was ich dorten erinnert habe, ſtimmt ſehr wohl mit der hier erwähnten **Bernoulliſchen** Erinnerung überein.

§. 209. (K. §. 637.)

Hier iſt $dx = -c \cdot \frac{-ndz}{m-nz} = -c \cdot \frac{d(-nz)}{m-nz}$

$= -c \cdot \frac{d(m-nz)}{m-nz} = c \cdot d \log (m-nz)$

alſo $x = -c \log (m-nz) + \text{Conſt.}$ Das giebt, wie aus dem Buch erhellet, $\frac{m}{m-nz} = E$, alſo $\frac{m}{E} = m - nz$ und

$$z = \frac{m - \frac{m}{E}}{n} = \frac{mE - m}{nE} = \frac{m \cdot (E - 1)}{n \cdot E}$$

§. 210. K. §. 641.)

dessen centrische Linie horizontal ist ꝛc. Für solchen müßte man nämlich eigentlich in (629.) m statt ω schreiben, wo aber das m (607.) gemeint wäre. Aber diese Substitution ist nicht nöthig, wenn man nur unter ω das versteht, was unter dem m (607.) zu verstehen ist.

§. 211. (K. §. 645.)

alsdann kein Druck ꝛc. Vielleicht wäre folgende Antwort der Natur der Formel noch angemessener: für $\omega = m$ wird der Druck auf die Röhrenwand gerad $= 0$, das Wasser in der Röhre reicht gerad vermöge der Gesetze seiner Bewegung ringsum bis an die Röhrenwand, übt aber weiter keinen Druck auf solche aus. Wird ω noch größer, so daß $\omega > m$ ist, so hört nicht nur der Druck des Wassers gegen die Wand auf, sondern das Wasser **entfernt sich noch von der Wand**, oder die dem Druck des Wassers gegen die Wand zugehörige Höhe, ist kleiner, als sie sein müßte, wenn das Wasser rings um an die Wand reichen sollte. Hieraus läßt sich wohl zugleich folgendes schliesen: soll das Wasser die nach der Oefnung zu erweiterte Röhre beständig ausfüllen, so muß noch eine äusere Kraft, die nicht in der Schwere des Wassers gegründet ist, hinzukommen. Und das stimmt völlig mit Erl. zu 169. überein. Wird die bei FG noch verschlossene Röhre (im Buch fig. 23.) mit Wasser gefüllt, und nun bei FG auf einmal eröfnet, so würde das Wasser bei FG schneller herausfahren, als das hinter ihm den leer gewordenen Platz wieder ausfüllen könnte, es würde also in der Röhre z. B. zwischen DE und FG eine Leere entstehen, auf die der Druck der Atmosphäre wirksam wäre. Man stecke zwischen DE, FG (hier fig. 42.) eine Röhre amb ein, die mit ihrem untern Ende b in ein mit Wasser gefülltes Gefäß A reicht; die obere Oefnung c sei noch verschlossen, a aber offen, so wie die unter dem Wasser befindliche Oefnung b. Solange nun die vertikale Erhöhung des Wasserspiegels

gels c über dem Wasserspiegel fg nicht über 31 bis 32 Fus beträgt, wird alles ruhig bleiben; wird aber c eröfnet, so wird auf einmal das Wasser bei FG herausschiesen. Leidet nun die Röhrenwand bei a keinen Druck, so muß, solange die Erhöhung der Stelle m über dem Wasserspiegel fg $<$ 31 bis 32 F. ist, wegen des Drucks der Atmosphäre auf fg, das Wasser aus dem Gefäß A durch die Röhre bma, bei a herauslaufen. Dieß kann also statt finden, auch wenn nicht gerad a an der Stelle liegt, wo zwischen DE und FG die Leere entstehen müßte.

Bei einem Gefäß (wie fig. 43.) wo das Wasser aus B durch die Röhre AE hinabfällt und bei FG hervorspringt, kann, wie ich oben erwähnt habe, gar wohl eine beständige Leere AR bleiben, so daß das Wasser in der Röhre nie höher als bis an R steht; brächte man also da zwischen A und R die Röhre $\alpha\beta$ an, die mit ihrer untern Oefnung unter der Oberfläche des im Gefäß A befindlichen Wassers stünde, so müßte in solcher das Wasser, womit die Röhre $\beta\alpha$ angefüllt wäre, wegen des Drucks der über fg stehenden Atmosphäre, solange die vertikale Erhöhung der Stelle α über der β $<$ 31 bis 32 F. ist, in die Höhe steigen und bei α herauslaufen, und das sämmtliche über β befindliche Wasser, aus dem Gefäß A nachfolgen. Wenn man aber auch die ins Gefäß A reichende Röhre nicht gerad zwischen A und R einsteckte, sondern nahe bei R etwa bei a, wo sich schon Wasser in der Röhre AE befände, so würde dennoch, wenn ab nicht die 31 F. erreichte, das Wasser durch die Röhre ba in die Höhe steigen und so nach und nach das sämmtliche in dem Gefäß A über b befindliche Wasser nachfolgen und bei a herauslaufen, weil doch die Röhrenwand bei a nur einen geringen Druck litte, der geringer als die Kraft wäre, womit die Atmosphäre das Wasser durch ba zu steigen nöthigte. Eben dergleichen Betrachtung läßt sich auch bei (fig. 42.) anstellen.

§. 212. (K. §. 648.)

Die hier angeführten Bern. Versuche dienen zur völligen Bestätigung der obigen Erinnerungen (169.)

I. Ich denke der entgegengesetzte physische Umstand für $\omega > m$ in Ansehung dessen, wenn $\omega < m$ ist, besteht gar nicht einmal im Saugen, sondern darin, daß nun, statt daß das Wasser die ganze Wand mit einer gewissen Gewalt drucken sollte, solches sich im Gegentheil von der Wand entfernt oder nicht die ganze Weite der Röhre ausfüllt; und sollte die Röhre ganz ausgefüllt werden, oder das Wasser sich nicht von der Wand entfernen, so müßte man dem aus dem Gefäß herauslaufenden Wasser eine Wassersäule, die über

der Oefnung ω ſtünde und die Höhe $\frac{h^2 a (\omega^2 - m^2)}{m \cdot (h - \omega^2)}$ hätte, entgegen ſtröhmen laſſen, und alsdann erſt würde der Druck auf der Wand oberſte Stelle = o ſein.

II. ſ. Erl. zu VII. und VIII.

III. Ich ſtelle mir die hierzu paſſende Figur wie (fig. 44.) vor. Im Anfang, da alles ruhig ſtand, alſo die Oefnung K noch verſchloſſen war, füllte das Waſſer aus dem Gefäß AF ſowohl die Röhre FK als die angeſetzte Röhre EDCH gleichfalls mit Waſſer an, ſo daß das Waſſer in dem letzten vertikalen Schenkel CH bis an B ſtieg, da dann nach den Lehren der Hydroſtatik AB in der verlängerten Waſſerfläche AI liegt. Nachdem die Oefnung bei K eröfnet wurde, trat das Waſſer aus dem Schenkel HC zurück bis etwa bei b, ſo daß b noch unter der Röhe FK lag, wie es die Figur zeigt. „Auf ſolche Art hatte „alſo, ſchlieſt **Bernoulli**, der auf die Röhrenwand FK **verneinte** Druck des „Waſſers, das Waſſer **wirklich auf eine verneinte** Weiſe, in dem Schen„kel CH **aufwärts gedruckt** d. i. zurückgezogen." Nur ſaget B. „ſei das Waſſer im Schenkel HC nicht weit genug zurückgetreten; es hätte, „wenn ſonſt keine Hinderniſſe da geweſen wären, noch weiter zurücktreten „müſſen."

VII. VIII. Mir ſcheint es nicht, als ob dieſe Erklärung ſo völlig befriedigend wäre. Auf den Verſuch in (III.) paßt ſie einmal nicht, wie auch in (II.) erinnert wird. Aber auch der Verſuch in III. läßt ſich aus nachſtehenden Gründen dadurch wohl nicht völlig erklären.

1.) Wenn wirklich beim Querſchnitt bei l eine Leere entſteht, ſo findet ſtatt, was ich oben erinnert habe, der Druck der Atmoſphäre auf AB, kann nämlich nun nicht durch den unten bei G entgegengeſetzten, aufgehoben werden, weil zwiſchen der Waſſermaſſe Gl und der ABD eine Leere iſt, durch die ſich doch kein Druck fortpflanzen kann. Es wird vielmehr die Atmoſphäre mit ihrer ganzen Kraft die Maſſe ABD niederwärts, dagegen aber die Maſſe Gl, mit ihrer nicht ganzen, ſondern um den Druck der Maſſe Gl verminderten Kraft, aufwärts zu bewegen ſtreben. So dienen alſo die entgegengeſetzten Drücke der Atmoſphäre im Ganzen hier wirklich zur Beſchleunigung des Waſſers.

2. In den allermeiſten Fällen (worüber ich mich oben etwas beſtimmter erklärt habe,) wird nicht wirklich eine Leere entſtehen, ſondern der eben erwähnte Druck der Atmoſphäre wird ſolches verhindern, und machen, daß das Waſſer beſtändig den ganzen Raum ausfüllt (wie Erl. zu 183.) wo wegen des Drucks der Atmoſphäre keine Höle entſtehen kann.

3.) Wenn

3.) Wenn aber auch wirklich eine Leere zwiſchen D und G entſteht, ſo wird man immer noch fragen müſſen: wo entſteht ſie? und dann würde die Erklärung im Buch vorausſetzen, daß die Mündung des Rohrs ml gerad in dieſe Leere treffe.

4. Aber wo ich nicht irre, iſt die Betrachtung dieſer Luftleere hier gar nicht nöthig, wenn man nur erwägt, daß die Atmoſphäre das Waſſer mit einer Kraft im Rohr zu ſteigen nöthigt, die durch den ſchwächern Gegendruck des Waſſers im Gefäß nach lm zu, nicht aufgehoben wird, wie (Erl. zu 645.) So wird auch II. und III. gar wohl begreiflich. Auch erhellet, daß das Steigen des Waſſers nach der Haupträhre zu, gar nicht die Wirkung des verneinten Drucks gegen die Röhrenwand, der aus $\omega > m$ herrührt, iſt, ſondern daß ſolches in allen Fällen zu erwarten ſei, wo die Kraft, mit der die Atmoſphäre eine Waſſerſäule zu ſteigen nöthiget, gröſſer als der Widerſtand an der Oefnung iſt, wo das Waſſer auslauft. Ein offenbares Beiſpiel iſt fig. 43. wo die Oefnung bei F weit kleiner als bei A d. i. ω viel kleiner als m ſein kann, und doch das Waſſer aus dem Gefäß A durch die Röhre $\beta\alpha$ in die Höhe ſteigen müßte, wenn nur die Höhe der Stelle α über fg nicht > 31 bis 32 F. iſt, desgleichen durch ba zuverläßig, wenn die Höhe R über fg nicht über etwa 31 F. beträgt.

VIIII. das M nicht ꝛc. Eben das müßte erfolgen, wenn man nur das Rohr ml auswendig vor der Röhre DG durchlöcherte, um dadurch dem Druck der Atmoſphäre einen freien Zutritt zu verſchaffen.

§. 213. (K. §. 655.)

bei der kleinen Oefnung ꝛc. Für den Anfang der Bewegung iſt es natürlich, Hrn. d'Al. beizutreten. Aber da giebt auch die Bern. für den Werth des Drucks nur das einfache Gewicht der flüßigen Materie. Nach und nach aber wächſt dieſer Druck, ſo wie das Waſſer im Gefäß nach und nach ſtärker in Bewegung kommt, und erſt für ein ſehr groſſes t, kommt der Druck dem doppelten Gewicht des Waſſers ſehr nahe, auch nach der Formel, wie ich ſie (Erl. zu 544. am E.) ausgedruckt habe. Sollte aber wohl, was ich Erl. zu 544. geſagt habe, nicht ſelbſt Hrn. d'Al. Gedanken völlig gemäß ſein? Ich habe übrigens mit Fleis ſämmtliche hier erwähnte d'Alembertſche Erinnerungen ſtillſchweigend übergehen wollen.

§. 214. (K. §. 658.)

einen Theil der Kraft ꝛc. Es iſt der Theil in (455. V.)

§. 215.

§. 215. (K. §. 671.)

Wenn noch alles in Ruhe iſt, und nun die Kraft k, die für ſich unveränderlich iſt, auf AB zu drucken anfängt, ſo kann anfangs, da erſt alles Waſſer aus der Röhre in Bewegung gebracht werden ſoll, die Oberfläche des Waſſers AB, nur ſehr langſam ſinken; ſo wie aber das Waſſer ſchon eine gewiſſe Geſchwindigkeit hat, ſo muß der Kolben, auf den nun noch immer die nämliche Kraft druckt, ſchon geſchwinder ſinken können, als ganz im Anfang. Bei dem beſtändig fortdauernden Druck auf den Kolben und folglich auch auf das Waſſer, bekommt nun das Waſſer immer mehr Geſchwindigkeit und der Kolben geht auch immer geſchwinder hinter ihm drein, ſo daß er wirklich mit einer beſchleunigten Bewegung ſinken muß, daferne die Kraft, welche den Kolben treibt, für ſich als beſtändig angenommen werden kann, es mag übrigens dieſe Kraft durch ein Waſſerrad, oder durch ein Trittrad, oder durch eine Windmühle, oder wie man will, erhalten werden. Das Rad oder iede andere Maſchine würde nämlich beim Sinken des Kolbens, immer weniger Widerſtand finden und daher wegen dieſes abnehmenden Widerſtandes allerdings beim Sinken des Kolbens ſich auch mit beſchleunigter Bewegung drehen. Man würde hieraus mit Recht ſchlieſen, daß der Kolben auf ſolche Weiſe völlig wie durch eine Schwere, die nur geringer als die unſrige wäre getrieben im Stiefel ſinken müßte. Man hat aber hierbei folgendes zu überlegen; Wenn der Kolben noch bei AB ſteht, ſo iſt die Laſt, die ihm entgegenſteht, d. i. die über AB hervorragende Höhe der Waſſerſäule in der Steigröhre am geringſten; ſo wie der Kolben ſinkt, ſo wächſt die Höhe dieſer über die Grundfläche des Kolbens hervorragenden Waſſerſäule in der Steigröhre, alſo iſt der Unterſchied, um wie viel die Schwere, mit der der Kolben ſinkt, kleiner als unſere Schwere iſt, in ieder Stelle des Kolbens anders, bei AB am kleinſten und bei CD am größten, und der Kolben ſinkt alſo eigentlich mit einer veränderlichen, nämlich immer abnehmenden Schwere (höh. Mech. I. Abſchn. 69.) Wäre aber die ganze Höhe AC, von der höchſten Stelle des Kolbens bis zu ſeiner tiefſten, ſo beſchaffen, daß die Laſt, die des Kolbens Grundfläche entgegengeſetzt iſt, an allen Stellen des Stiefels, für einerlei angenommen werden könnte, ſo fällt in die Augen, daß man auch annehmen dürfte, der Kolben ſinke wirklich wie von einer der unſrigen völlig ähnlichen, nur geringern, Schwere getrieben. Auf ſolche Art wird ſich der Zuſammenhang der nachfolgenden Sätze im Buch überdenken laſſen.

Ich erinnere nur noch, daß im Buch eigentlich nur die Rede von ſolchen Druckwerken iſt, wo die Steigröhre in die Wand des Stiefels ſo eingeſetzt iſt, daß das Waſſer beim Niedergehen des Kolbens in die Steigröhre hineingetrie-

erleben wird, wo also die Mündung der Steigröhre unter dem Kolben liegt. Man kann aber auch das Druckwerk so einrichten, daß die Mündung der Steigröhre über dem Kolben liegt, so daß sich die Steigröhre nur als der aufwärts verlängerte Stiefel ansehen läßt, wo also die Kolbenstangen durch die Steigröhre hindurch bis zu dem im Stiefel befindlichen Kolben gehn, und das Wasser nicht beim Niedergehen sondern beim Aufgehen des Kolbens aufwärts gehoben wird, wie bei den sogenannten hohen Sätzen in den Bergwerken. Zum Unterschied will ich iene Art von Druckwerken eigentliche Druckwerke, die zuletzt beschriebenen aber, wodurch das Wasser eigentlich mit dem Kolben in die Höhe gehoben wird, Hebdruckwerke nennen. Die Formeln im Buch für den ganzen Kolbenschub gebraucht, die überhaupt nur zur Näherung dienen, lassen sich auf beide Arten von Druckwerken anwenden.

V. Die Gleichung $\sqrt{(v+dv)} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}}$ ergiebt sich aus dem binomischen Lehrsatz (Alg. 141.) dessen Allgemeinheit in der An. d. Un. 46. erwiesen ist. Diesem gemäß ist $\sqrt{(v+dv)}$ oder $(v+dv)^{\frac{1}{2}} =$

$$v^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}v^{\frac{1}{2}-1} \cdot dv + \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)}{1\cdot 2} \cdot v^{\frac{1}{2}-2}\, dv^2 + \ldots$$

$$= v^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} \cdot dv - \tfrac{1}{8}v^{-\frac{3}{2}}\, dv^2 + \ldots$$

$$\text{oder} = \sqrt{v} + \frac{dv}{2\sqrt{v}} - \ldots$$

wo alle folgende Glieder höhere Potenzen von dv enthalten und daher weggelassen werden.

VI. Wieder wie in (V.) ist hier

$$\frac{1}{\left(z + \frac{a^2 S\, dr}{z^2}\right)^4} = \left(z + \frac{a^2 S\, dr}{z^2}\right)^{-4}$$

$$= z^{-4} + (-4) \cdot z^{-4-1} \cdot \frac{a^2 S}{z^2}\, dr + \ldots$$

$$= \frac{1}{z^4} - \frac{4a^2 S\, dr}{z^7} + \ldots$$

wo wieder alle übrige Glieder als Produkte in höhere Potenzen von dr wegbleiben. Aus eben der Ursache wird auch am Ende dieses Absatzes VI. nur

$$\frac{a^4 dv}{z^4} - \frac{4a^6 v S dr}{z^7} \text{ statt } \frac{a^4 dv}{z^4} - \frac{4a^6 vS}{z^7} \cdot dr - \frac{4a^6 vS}{z^7} \cdot dr dv$$

gesetzt, weil dieses letzte Glied gleichfalls gegen die übrigen verschwindet.

VII. Daß keine Aenderung der Geschwindigkeit ohne besondere Kraft erfolgt, und daß doch der Durchgang des Wassers aus einer weitern Röhre in eine engere Aenderung der Geschwindigkeit voraussetzt; darin liegt die Ursache, warum überhaupt destomehr Kraft erfodert wird, aus einem Gefäße, Wasser in eine Röhre zu treiben, ie enger diese Röhre ist. Hr. d'Alembert denkt hier gewiß eben so, und doch sollte er nach (653.) anders denken.

XIIII - XVI. Daß aber z y schon weniger gedrückt werden muß als ZY ist deswegen offenbar, weil über zy schon eine kürzere Wassersäule steht, als über ZY; man kann daraus schliesen, daß $p + dp < p$ folglich dp verneint sein müsse, wie auch gleich der Anblick in (672.) zeigt.

§. 216. (K. §. 673.)

b bedeutet die ganze Höhe CA oder DB vom niedrigsten Stand der Grundfläche des Kolbens bis zu ihrem höchsten.

§. 217. (K. §. 675.)

Es ist nämlich aus (672.)

$$p = \text{Const.} - y - \frac{a^2 dv}{dr} \int \frac{ds}{z^2} - \frac{a^4 v}{z^4} \quad (\text{h.}$$

Nun muß diese Formel für $y = o$ und $z = c$ sich in die (674.) verwandeln nämlich in

$$p = k + b - r + v - \frac{(b - r) \cdot dv}{dr} - \frac{a^4 v}{c^4};$$

sie verwandelt sich aber, wenn man, wie im Buch angegeben wird integrirt, wirklich in diese

$$p = \text{Const} - o - \frac{a^2 dv}{dr} \cdot o - \frac{a^4 v}{c^4} = \text{Const} - \frac{a^4 v}{c^4}$$

also hat man

Consi

$$\text{Conſt} - \frac{a^4 v}{c^4} = k + b - r + v - \frac{(b-r)\cdot dv}{dr} - \frac{a^4 v}{c^4}$$

und das giebt hier

$$\text{Conſt} = k + b - r + v - \frac{(b-r)\cdot dv}{dr}$$

dieſes nun in $\mathfrak{h}$ gebraucht, giebt

$$p = k + b - r + v - y - \frac{(b-r)\cdot dv}{dr} - \frac{a^2 dv}{dr}\int\frac{ds}{z^2} - \frac{a^4 v}{z^4}$$

Hier nur $\int\frac{ds}{z} = Q$ geſetzt giebt die Formel im Buch.

§. 218. (K. §. 683.)

erhält man ꝛc. Dadurch nämlich, daß man nach Anweiſung der Alg. die zu r^0, r^1, r^2 . . . gehörige Köefficienten (682.) $= 0$ ſetzt.

§. 219. (K. §. 692.)

$v = A \cdot b$ ꝛc. nämlich mit Weglaſſung derer Theile, die das Quadrat von b enthalten.

§. 220. (K. §. 693.)

indem der Kolben niedergeht ꝛc. Dieſer Schluß hängt mit der Rechnung ſo zuſammen. Der Werth des Drucks auf DE heiſe Σ, ſo iſt

$$d\Sigma = \left(\frac{k-g}{Ha^2}\cdot\left(2 - \frac{a^4}{c^4}\right) - 1\right)\cdot dr$$

$$\text{und } \frac{d\Sigma}{dr} = \frac{k-g}{Ha^2}\cdot\left(2 - \frac{a^4}{c^4}\right) - 1$$

welches beiaht iſt, ſolange

$$Ha^2 < (k-g)\cdot\left(2 - \frac{a^4}{c^4}\right)$$

aber verneint, wenn

$$Ha^2 > (k-g)\cdot\left(2 - \frac{a^4}{c^4}\right)$$

iſt. Im erſtern Fall alſo ſind $d\Sigma$, dr, homogene, im letztern aber heterogene Differentialien (Erl. d. An. d. Un. S. 55.) d. h. im erſtern Fall verändern ſich Druck des Waſſers und Weg des Kolbens auf einerlei, im letztern auf

entgegengeſetzte Art; alſo je tiefer der Kolben ſinkt, deſto gröſſer iſt der Druck im erſtern Fall, und deſto kleiner im letztern.

§. 221. (K. §. 694.)

III. Aus (685.) iſt

$$A^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{k-g}{Ha^2} - \left(\frac{k-g}{H^2a^4}\right)\cdot b + \frac{1}{Ha^2}\cdot b + \cdots\right)$$

wo die höheren Potenzen von b wegbleiben,

$$= \left(\frac{k-g}{Ha^2} + \left(\frac{1}{Ha^2} - \frac{k-g}{H^2a^4}\right)\cdot b\right)^{-\frac{1}{2}}$$

alſo nach dem binomiſchen Lehrſatz (Alg. 141.)

$$= \left(\frac{k-g}{Ha^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(-\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{k-g}{Ha^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{Ha^2} - \frac{k-g}{H^2a^4}\right)\cdot b\right)$$

$$= \frac{(k-g)^{-\frac{1}{2}}}{a^{-1}\cdot H^{-\frac{1}{2}}} - \tfrac{1}{2}\frac{(k-g)^{-\frac{3}{2}}}{a^{-3}\cdot H^{-\frac{3}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{Ha^2} - \frac{k-g}{H^2a^4}\right)\cdot b$$

$$= \frac{a\,H^{\frac{1}{2}}}{(k-g)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^3\,H^{\frac{3}{2}}\cdot b}{2\cdot(k-g)^{\frac{3}{2}}\cdot Ha^2} + \frac{a^3\cdot H^{\frac{3}{2}}(k-g)\cdot b}{2\cdot(k-g)^{\frac{3}{2}}\cdot a^4\,H^2}$$

$$= \frac{a\,H^{\frac{1}{2}}}{(k-g)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a\,H^{\frac{1}{2}}\cdot b}{2(k-g)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b}{2(k-g)^{\frac{1}{2}}\cdot a\,H^{\frac{1}{2}}}$$

$$= a\sqrt{\left(\frac{H}{k-g}\right)}\cdot\left(1 - \frac{b}{2\cdot(k-g)} + \frac{b}{2a^2H}\right)$$

§. 222. (K. §. 709.)

I. Ex. Es ſei 1.) $\frac{\pi^2 ag}{4} = 8$, $K = 17$, ſo iſt

$$\sqrt{\left(K - \frac{\pi^2 ag}{4}\right)} = \sqrt{(17-8)} = 3$$

Nun

Nun sei 2.) $K = 44 = 2\frac{10}{11} \cdot 17$, so ist

$$\sqrt{\left(K - \frac{\pi^2 ag}{4}\right)} = \sqrt{(44 - 8)} = 6$$

also in diesem Fall die Wassermenge doch doppelt so stark als im vorigen.

II. Ex. Es sei 1.) $\frac{\pi^2 ag}{4} = 4$, $K = 5$, so ist

$$\sqrt{\left(K - \frac{\pi^2 ag}{4}\right)} = \sqrt{(5 - 4)} = 1$$

2.) $K = 40 = 8 \cdot 5$, so ist

$$\sqrt{\left(K - \frac{\pi^2 ag}{4}\right)} = \sqrt{(40 - 4)} = 6$$

also sechsmal so groß als im ersten Fall. Ich führe dergleichen Beispiele an, um zu zeigen, daß eben nicht allemal die Wassermenge in einem viel geringern Verhältnis als die Kraft wächst. Dazu kommt nun auch in der Ausübung der Umstand, daß allemal zu Ueberwindung der Friktion, worauf in allen bisherigen Formeln noch gar nicht ist gesehen worden, ein beträchtlicher Theil der Kraft verwandt werden muß. Ist diese einmal überwunden, so wird ieder weiter hinzugesetzte Theil der Kraft, blos zur wirklichen Betreibung der eigentlichen Last angewandt, und dieses Umstandes wegen, kann wirklich in der Ausübung die doppelte Kraft weit mehr, als die doppelte Wassermenge geben. So kann wegen der Friktion z. B. ein Rad, das iede Sec. $\frac{1}{2}$ Cub. Fus Aufschlagwasser hat, bei einer gegebenen Anzahl angehängter Pumpen, sowohl wegen der Reibung des Rades an seinen Zapfen und des Gestänges, als auch der Kolben an den Wänden der Stiefeln, noch nicht Wasser genug haben, um in Bewegung gebracht zu werden, die aufgeförderte Wassermenge wäre also für iede Zeit $= 0$; $\frac{1}{2}$ Cub. F. Wasser aber kann z. B. das Rad mit den angehängten Pumpen in Bewegung bringen, so wird nun alle Sec. eine gewisse Wassermenge $= M$ aufgefördert, die also $\frac{M}{0}$ d. i. unendlich mal gröſſer als zuvor bei der Hälfte des Aufschlagwassers ist. Diese Erinnerungen hielte ich für nöthig, um nicht durch die unten vorkommenden Anwendungen zu zweifeln Anlaß zu geben. s. auch 719.

§. 223. (K. §. 710.)

wenn alles übrige ꝛc. d. h. alles übrige, was hier in denen Formeln vorkommt. Sobald die Friktion — nichts Unbeträchtliches — mit in Anschlag kommt, werden alle dergleichen aus denen bisherigen Formeln fliesende Sätze falsch. s. die vor. Erl.

§. 224. (K. §. 711.)

s. die Erinnerung § 710. Die nun folgenden Regeln behalten dennoch, wie in die Augen fällt, ihre völlige Richtigkeit.

§. 225. (K. §. 714.)

Für den Druck zu unterst wird nämlich in der Formel (707.) $y = s = o$.

die Röhre für eine Weite hat ꝛc. nämlich die **Steigröhre**, weil der eben erwähnte Ausdruck für die Grösse des Drucks keine von den Abmessungen der Steigröhre enthält. Von der Weite des **Stiefels** aber hängt dieser Druck allerdings ab, da der Nenner a^2 enthält, also der untere Druck sich bei einerlei K umgekehrt wie das Quadrat von der Weite oder das Biquadrat vom Durchmesser des Stiefels verhält.

§. 226. (K. §. 715.)

einerlei ist ꝛc. s. Erl. zu 710. Ausführliche Anwendungen kommen unten vor.

§. 227. (K. §. 719.)

Zweites Er. ꝛc. Daraus würde also nach (709.) folgen, daß die schiefe Röhre, um eben die Wassermenge auszuschütten, mehr als 6mal soviel Kraft als die vertikale, oder daß die vertikale weniger als $\frac{1}{6}$ soviel Kraft als die schiefe Röhre nöthig hätte. Das kann aber sehr weit von dem Erfolg in der Ausübung abweichen. Der 6te Theil von der Kraft, die das Wasser durch die schiefe Röhre noch ziemlich schnell treibt, könnte vielleicht bei dieser schiefen Röhre zur Ueberwindung der Friktion verwandt werden, und da eben das auch bei der vertikalen in Anschlag kommt, so könnte dieses Sechstheil bei solcher vielleicht gerade nur der Friktion die Wage halten, oder doch nur eine sehr langsame Bewegung hervorbringen. Ausserdem hat man aber auch noch folgendes zu bedenken. Wenn dergleichen Vortheil bringende Regeln beobachtet werden, so wird eben wegen des Vortheils den sie bringen, wenn sonst alles ungeändert bleibt, die Zeit eines Kolbenspiels d. h. die Zeit, in der der Kolben einmal auf- und niedergeht, verkürzt. Dadurch nun wird wirklich K für sich betrachtet ver-

min-

mindert nur die Geschwindigkeit, mit der K wirkt, wird vergrössert. Z. B. ein Mensch, der eine Last von 34 ℔ über eine Rolle vertikal aufwärts zieht, übt wirklich eine Kraft von 34 ℔ aus, aber dieses kann er mit einer gewissen Geschwindigkeit z. B. von 2 Fus thun; zöge er nun eine Last von 20 ℔ in die Höhe, so wäre seine angewandte Kraft = 20 ℔, aber solche kann er nun, ohne sich mehr als zuvor anzugreifen, mit einer grössern Geschwindigkeit ausüben z. B. von 3 Fusen in einer Sec. da dann doch in diesem letztern Fall bei der größern Geschwindigkeit der Effekt = 3 · 20 = 60 kleiner als bei der kleinern Geschwindigkeit wäre, da er = 2 · 34 = 68 ist. (s. höh. Mech. Erl. zu 64.). Nimmt man also an, die angewandte Kraft soll immer einerlei bleiben, so bleibt wirklich K nicht einerlei, wie doch die bisherigen Schlüsse voraussetzen. Um daher eigentlich die Verschiedenheit der Effekte, bei verschiedenen Steigröhren zu beurtheilen, muß man sehen, was die Geschwindigkeit, mit der die einmal bestimmte Kraft ausgeübt wird, für Aenderungen dabei macht d. i. man muß die Zeit eines Kolbenspiels mit in Rechnung bringen. Dieß geschieht in der Folge, wo erhellen wird, wie auch schon aus der höh. Mech. a. a. O. bekannt ist, daß die Geschwindigkeit des Hubs, die Wirkung der Kraft sehr vermindern kann. K ist im Bisherigen wie ein an sich grosses auf der Oberfläche des im Stiefel befindlichen Wassers liegendes Gewicht betrachtet worden, das freilich immer auf einerlei Art auf das Wasser druckt (wie 455.) und solches immer fort während dem Sinken beschleunigt, und, wenn nur der Stiefel lang genug wäre, bis zu einer ungeheuern Geschwindigkeit beschleunigen würde. Aber bei andern Arten von Kräften, ist dieses anders. Der Mensch kann dem Kolben nur eine gewisse Geschwindigkeit mittheilen, und soll solche sehr groß sein, so muß die Wassermenge, die er wältigen soll, sehr gering sein; ein Strahl, der gegen die Ebene einer Radschaufel fährt, kann dem Rad keine grössere Geschwindigkeit mittheilen, als er selbst hat, und soll er das Rad wirklich mit einer Geschwindigkeit bewegen, die nicht viel von der seinigen verschieden ist, so kann die Last, die man ihm zu wältigen geben darf, also auch die aufzufördernde Wassermenge sehr unbeträchtlich werden. Ein unterschlächtiges Rad, gegen dessen Schaufeln ein Wasserstrahl mit einer Geschwindigkeit von 15 Fusen anschlägt, und bei dem vortheilhaftesten Gang des Rades, also bei einer Geschwindigkeit von 5 Fusen, durch eine schief liegende Röhre, für die l = 4500 F. wäre, eine beträchtliche Menge Wasser M in die Höhe triebe, müßte durch die vertikale Röhre, für die g = 130 F. wäre, wenn es nun 6mal soviel Wasser aufwärts treiben sollte, nothwendig auch 6mal so geschwind d. i. mit einer Geschwindigkeit von 6 · 5 = 30 F. also doppelt so geschwind als der Strahl selbst sich bewegen, welches unmöglich ist. So, hoffe ich,

wird

wird es begreiflich werden, daß es bei Vergleichung der wirklichen Effekte der Druckwerke, mit auf die Art derer Kräfte, deren man sich hierzu bedienen will, ankomme, und daß also die bisherigen Schlüsse im Buch, auch ohne Rücksicht auf die Friktion, sich noch keineswegs so schlechthin auf die Ausübung anwenden lassen. Mir ist bei Anlegung eines Druckwercks ein Fall vorgekommen, wo $l = 40 \cdot g$ also noch $>$ mg im Buch war, und dennoch zeigte die Berechnung, daß man bei der **vertikalen** Röhre wirklich mehr nicht als $\frac{1}{4}$ der Kraft, die bei der schiefen erfodert würde, spahrte.

So müssen eigentlich §. 715. die Worte: **Hier kommt es nun auf die Art an** ꝛc. desgleichen §. 720 und 721 verstanden werden. Wie nun nach diesen Erinnerungen wirklich zu rechnen ist, und wie K sich ändert, wenn alles übrige nur t nicht ungeändert bleibt, wird in der Folge näher gewiesen werden. (s. 733. III.)

§. 228. (K. §. 723.)

Der Werth von a gebraucht, giebt die Zeit

$$= \frac{0{,}4484 \cdot 2\sqrt{\left(\frac{K}{\lambda \pi g}\right)} \cdot \sqrt{bl}}{c \cdot \sqrt{\frac{(\lambda - 1) \cdot \pi g}{2}}}$$

$$= \frac{0{,}4484 \cdot 4 \cdot \sqrt{K\,b\,l}}{c \cdot \sqrt{(\lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot \pi^2 g^2)}}$$

$$= \frac{1{,}7936}{\pi c g}\sqrt{\left(\frac{K\,b\,l}{\lambda \cdot (\lambda - 1)}\right)}$$

wo 3,141 statt π gesetzt, die folgende Formel im Buch giebt.

§. 229. (K. §. 736.)

s. die oben (Erl. zu 68. am E.) angef. Abhandlung in denen Act. Acad. Erfurd.

§. 230. (K. §. 748.)

Die ganze hierher gehörige Theorie tiefsinnig, und dabei mit der dem Hrn. H. Karsten ganz eigenen Gabe der Deutlichkeit auseinander gesetzt, findet man in

in dessen Lehrbegr. der ges. Math. VI. B. XXIII. — XXV. Abschn. der Hydraul. wo (474. §.) gewiesen wird, daß durch dergleichen Maschine der größtmögliche Effekt = A a geleistet werden kann, so wie der größtmögliche eines unterschlächtigen Rades = $\frac{8}{27}$ A a ist. Um diesen Effekt wirklich zu erhalten, muß man die Einrichtung so machen, daß das Wasser mit der Geschwindigkeit aus seiner Oefnung hervorsprützt, mit der sich die Oefnung nach der entgegengesetzten Seite herumdreht, welches man durch Vergrößerung oder Verminderung der Last, die man dieser Maschine zu wältigen giebt, wird bewerkstelligen müssen. H. H. K. empfiehlt übrigens diese Maschine doch nur in Fällen, wo man einen beträchtlichen Wasserzufluß und hinlängliches Gefälle hat. Ich schliese hieraus: weil man eben in dergleichen Fällen am wenigsten mit dem Wasser zu geitzen Ursache hat, und ohnehin alsdann durch ein oberschlächtiges Rad bei einer mäßig guten Einrichtung der Schaufeln auch beinahe den Effekt = A a erhalten kann, überdas auch nicht allemal so leicht der größte Effekt der gedachten Maschine wirklich zu erwarten ist, so wird man sich überhaupt lieber der oberschlächtigen Räder bedienen.

entgegengesetzt ist ꝛc. und zwar aus ieder Oefnung mit einer Gewalt, die dem Gewicht einer Wassersäule gleicht, deren Grundfläche die Oefnung, wodurch das Wasser ausströhmt, die Höhe aber doppelt so groß, als die der Geschwindigkeit des Wassers zugehörige Höhe ist. H. H. Karsten a. a. O. 459. §.

Weil es bei der Wirkung dieser Maschine auf die Geschwindigkeit ankommt, mit der das Wasser im Cylinder aus den Oefnungen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ herausströhmt, so sieht man leicht, daß man den Cylinder so hoch machen müsse, als das Gefälle verstattet, und dann seine innere Höle bis obenhin voll erhalten müsse. Dazu wird erfodert, wenn man doch alles Wasser gehörig benutzen will, daß die Oefnungen zusammen gerade soviel, nicht mehr und nicht weniger Wasser, in ieder gegebenen Zeit durchlassen, als oben in den Cylinder zulauft. Eine solche Einrichtung erfodert allemal wieder besondere Berechnungen und macht freilich den Gebrauch dieses Wassercylinders oder Wasserrads sehr schwierig. Dazu kommt noch in der Ausübung der beträchtliche Umstand, daß alles Gestein, Schlamm und sonstiger Unrath, der nie ganz zurückgehalten werden kann, mit in den Wassercylinder hineinfällt und dadurch nothwendig die Oefnungen häufig verstopfen und den Effekt der Maschine also sehr vermindern muß, da solches gegentheils die Wirkung eines oberschlächtigen Rades, eher noch wegen der grössern specifischen Schwere dieser mitgeführten Theile, verstärken könnte. Aus so vielen Gründen ist wohl nicht zu vermuthen, daß die gedachte Maschine iemals die oberschlächtigen Wasserräder verdrängen werde.

Das Nothwendigste aus der Lehre von den Saugwerken.

§. 231.

Was Saugwerke sind, setze ich als bekannt voraus s. die Anfangsgr. der angew. Math. Hydraul. §. 12 und 14. Wegen ihres häufigen Gebrauchs muß man wissen, wie die bei ihnen vorfallenden Berechnungen zu führen sind, und weil diese Lehre im Buch ganz übergangen ist, so will ich solche nach H. H. Karstens Lehrbegr. der ges. Mathem. V. B. nur auszugsweis, soviel zur wirklichen Berechnung in der Ausübung nöthig ist, hersetzen. Die Beweise davon kann Jeder, den eine blos historische Kenntnis nicht befriedigt, a. a. O. nachschlagen. Die Formeln selbst sind mir hier wegen den folgenden Anwendungen unentbehrlich.

§. 232.

Das Saugwerk besteht aus zweenen Haupttheilen 1. dem Kolbenstück oder Stiefel 2. der untergesetzten Saugröhre, durch die das Wasser beim Aufziehen des Kolbens von der Atmosphäre in den Stiefel hinaufgetrieben wird, da dann, um beim Niedergang des mit einer Klappe oder Ventil versehenen Kolbens, den Rückfall des hinaufgetriebenen Wassers zu verhüten, die Saugröhre gleichfalls mit einem Ventil versehen ist, das die Oefnung der Röhre, indem das Wasser zurückfallen will, verschliest. Zwischen diesem Ventil und dem niedrigsten Kolbenstand, kann noch ein Zwischenraum sein, der gleichfalls in eine Röhre eingeschlossen ist, die entweder die fortgesetzte Saugröhre, oder der fortgesetzte Stiefel, oder auch ein besonderes Stück Röhre von willkührlicher Weite sein kann. Dieser Raum heißt der schädliche Raum.

§. 233.

Von den Saugwerken oder Saugpumpen giebt es drei besondere Gattungen. Die Saugröhre hat nämlich ihr Ventil entweder an ihrer obern oder an ihrer untern Oefnung. Im letztern Fall heist die Saugpumpe eine Pumpe der unvollkommensten Art; im erstern Fall hat die Pumpe entweder einen schädlichen Raum, und dann heist sie eine Pumpe der mittlern Art, oder sie hat solchen nicht, und heist nun eine Pumpe der vollkommensten Art.

§. 234.

Es bedeute m^2 den Querschnitt des Stiefels
n^2 den Querschnitt der Saugröhre beide im Lichten verstanden
c die Höhe des Kolbenhubs

β die

β die Höhe des mit Luft gefüllten Stücks der Saugröhre.
h die Höhe der Wassersäule, der die Federkraft dieser Luft das Gleichgewicht hält;
und y die Höhe, um welche das Wasser bei iedem Kolbenzug in der Saugröhre weiter steigt;

so ist für die Pumpe der vollkommensten Art 1.) $y =$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2c}{n^2}+\beta+h\right)-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{n^2}+\beta+h\right)^2-\frac{m^2ch}{n^2}\right)}$$

Für den ersten Kolbenzug ist bekanntlich h etwa $= 32$ Rhl. Fus. Fände man nun für solchen $y = 3$ F. so wäre für den zweeten Kolbenzug $h = 32 - 3 = 29$ F. und wenn dieser Werth substituirt $y = 4$ F. gäbe, daß also am Ende des zweeten Kolbenzugs das Wasser schon um $3 + 4 = 7$ F. in der Saugröhre über dem Wasserspiegel steht, so wäre für den dritten Kolbenhub $h = 32 - 7 = 25$ F. u. s. w. Sobald auf solche Art das Wasser nach und nach um eine Höhe > Höhe der Saugröhre gestiegen ist, so muß bei iedem folgenden Kolbenzuge das Wasser um die Höhe c steigen, und die Rechnung nach der erwähnten Formel, fällt also alsdann weg.

§. 235.

Für die Pumpe der unvollkommensten Art gilt eben die Formel, nur daß da der Werth von h unveränderlich $= 32$ Fus bleibt.

§. 236.

Für eben diese Pumpe ist, wenn b die Länge der Saugröhre bedeutet, die größte Höhe, auf die das Wasser in der Saugröhre gezogen werden kann,

$$2.) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2ch}{n^2}+b\right)-\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{n^2}+b\right)^2-\frac{m^2ch}{n^2}\right)}$$

also muß die Höhe des Wasserspiegels bis zum niedrigsten Stand des Kolbenventils, geringer als diese Höhe sein, wenn das Wasser bis zur Gußröhre soll kommen können.

§. 237.

Für die Pumpe der mittlern Art seze man noch
die größte Höhe des Kolbens über dem Wasserspiegel $= a$
die Höhe des schädlichen Raums, $= f$
dessen Weite $= r^2$
sein cub. Inhalt $= k^3$

Behält übrigens h die Bedeutung (§. 234.) und hat h′ die ähnliche Bedeutung für den nächstfolgenden Kolbenzug, so ist

$$3.)\quad y = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2c + k^3}{n^2} + \beta + h'\right) - \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2c + k^3}{2} + \beta + h'\right)^2 + \frac{(h - h')\cdot k^3}{n^2} - \frac{m^2ch'}{n^2}\right)}$$

Für den ersten Kolbenzug ist $h = h'$ und das Glied $\frac{(h - h')\cdot k^3}{n^2}$ verschwindet also.

§. 238.

Die größte Höhe z, worauf bei dieser Pumpe das Wasser in der Saugröhre steigen kann, ist

$$= \frac{m^2c}{m^2c + k^3}\cdot 32 \text{ Fus.} = \frac{m^2c : n^2}{m^2c : n^2 + k^3 : n^2}\cdot 32 \text{ F.}$$

Versteht man also unter c und k die auf die Weite der Saugröhre reducirte Höhen des Kolbenzugs und des schädlichen Raums, so ist

$$4.)\quad z = \frac{c}{c + k}\cdot 32 \text{ F. oder} = \frac{ch}{c + k}$$

§. 239.

Wenn f die Höhe des schädlichen Raums, und s die Höhe des Stücks desselben bedeutet, bis wohin das Wasser gezogen werden kann, so ist

$$5.)\quad s = \tfrac{1}{2}\left(\frac{m^2c}{r^2} + f - b\right) \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\left(\frac{m^2c}{r^2} + f + b\right)^2 - \frac{m^2ch}{r^2}\right)}$$

§. 240.

Wenn E die auf die Weite des schädlichen Raums reducirte Höhe des Kolbenzugs bedeutet, so sind die Fälle, da das Wasser bis zur Gußröhre gehoben werden kann, diese

1.) wenn $b < \frac{ch}{c+f}$ und zugleich $c + f < b$

also auch $\frac{ch}{c+f}$ nicht $< c + f$ ist

2.) wenn $c + f + b < 2\sqrt{ch}$ und zugleich $c + f > b$ ist

Sind

Sind also von den drei Stücken b, c und f zwei gegeben, so läßt sich allemal der äuserste Werth des dritten angeben, bei dem die Pumpe eben vermögend ist, das Wasser zur Gußröhre zu bringen. Nämlich

I. Ist c und f gegeben, so sehe man, ob $\frac{ch}{c+f}$ nicht $< c + f$ ist; in solchem Fall muß man nach dem ersten Satz $b < \frac{ch}{c+f}$ nehmen; wäre $\frac{ch}{c+f}$ nicht $< c + f$, so müßte man nach dem zweeten Satze $b < -(c + f) + 2\sqrt{ch}$ nehmen.

II. Ist b und c gegeben, so giebt sich die Gränze, die f nicht übertreffen darf, so: aus no. 1. $b < \frac{ch}{c+f}$ folgt auch $f < \frac{c \cdot (h - b)}{b}$; man sehe also, ob $c + f$ oder $c + \frac{c \cdot (h - b)}{b} < b$ ist, und in solchem Fall müßte man nach no. 1. $f < \frac{c \cdot (h - b)}{b}$ nehmen; im gegenseitigen Fall aber nähme man $f < -(b + c) + 2\sqrt{ch}$

III. Ist b und f gegeben, so giebt der Ausdruck $b < \frac{ch}{c+f}$ auch $c < \frac{bf}{h - b}$; man sehe also, ob $\frac{bf}{h - b} + f$ nicht $> b$ ist so ist gewiß $c + f < b$, und dann ist nach no. 1. $c < \frac{bf}{h - b}$ zu nehmen; findet aber das Gegentheil statt, so muß man $c < 2h + f - b \pm \sqrt{2h} \cdot \sqrt{2} \cdot (h - f - b)$ nehmen, da dann die beiden Werthe zur Rechten des Zeichens $<$ die Gränzen sind, zwischen welchen der Werth von c genommen werden muß, und zwar der kleinsten Gränze am nächsten.

§. 241.

Wenn vorausgesetzt wird, daß die Gußröhre zunächst über dem höchsten Kolbenstand liegt, f die Höhe des niedrigsten Kolbenstandes über den Wasser-

spiegel bedeutet, m noch den Querschnitt oder die Weite des Stiefels, und h die Höhe des Kolbenhubs ausdruckt, und das Gewicht eines Cub. Fuses Wasser = 1 gesetzt wird, so ist der Widerstand, welchen eine an der Kolbenstange vertikal aufwärts ziehende Kraft im ersten Augenblick der Bewegung zu überwinden hat = m (f + h)

§. 242.

Wenn das Wasser im Stiefel um eine gegebene Höhe w über den niedrigsten Kolbenstand gestiegen ist, die der Geschwindigkeit des Wassers an dieser Stelle des Stiefels zugehörige Höhe q heist, und die Kraft, welche den Kolben aufwärts zieht, durch das Gewicht einer Wassersäule über der Grundfläche m in der Höhe k ausgedruckt wird; wenn ferner die Länge der ganzen Saugröhre vom untersten Kolbenstand bis zum Mittelpunkt der untern Oefnung gerechnet = l und ihre Querschnitte im Lichten d. i. ihre Weite = n gesetzt wird, so hat man, die Höhe des schädlichen Raums = e gesetzt,

$$6.)\quad q = \frac{(k - f) \cdot w - \frac{1}{2}w^2}{e + ml : n + w}$$

da dann das Wasser im Stiefel unter dem Kolben, wie beim Druckwerk, mit zunehmender Geschwindigkeit steigt.

§. 243.

Ein Zerbersten der Saugröhre ist hier deswegen nicht zu befürchten, weil der äusere Druck der Atmosphäre überall die Röhre stärker zusammenpreßt, als die innere Wassersäule solche aus einander zu treiben strebt. Aber eben darum ist das Eindringen der Luft sehr leicht möglich, und aus der Ursache doch sorgfältig auf eine feste und dickwändige Röhre zu sehen, damit ieder Kolbenhub volles Wasser giebt. Ich glaube, daß man bei guten tannenen Röhren, gegen dieses Eindringen der Luft, allemal hinlänglich gesichert ist, wenn man einen Stamm so weit ausbohrt, daß der Durchmesser der Röhre, nicht über den vierten Theil vom Durchmesser des ganzen Stamms beträgt. Wird der Stamm viel weiter gebohrt, so hab ich oft die Erfahrung gehabt, daß die Luft durch die Röhrenwand durchgedrungen ist, und die Pumpe nicht volles Wasser gegeben hat. Hätte man also eine 4 Zoll weite Saugröhre nöthig, so müßte man hierzu einen Stamm gebrauchen, dessen Durchmesser nicht unter $1\frac{1}{3}$ Fus betragen dürfte, und wo man z. B. keine über einen Fus dicke Röhrenstämme hätte, dürfte man die Saugröhren nicht wohl im Durchmesser über $\frac{12}{4} = 3$ Zoll weit bohren lassen.

§. 244.

§. 244.

Wenn man $k - f = c$, und $e + ml : n = B$ ſetzt, ſo iſt die Zeit t, worin das Waſſer unter dem Kolben im Stiefel vom niedrigſten Kolbenſtand an, um eine gegebene Höhe w ſteigt, wenn der Durchmeſſer des Stiefels D und der Durchm. der Saugröhre d heiſt, auch g die gewöhnliche Bedeutung hat

$$7.)\ t = \frac{\text{Bog. Querſ.}\ \frac{w}{c}\sqrt{2B} + \frac{c}{\sqrt{2B}}\left(\text{Bog ſv}\ \frac{w}{c} - \text{ſin B ſv}\ \frac{w}{c}\right)}{2\sqrt{g}}$$

§. 245.

Soll alſo der Kolben, deſſen Hub ſich hier gleichförmig annehmen läßt, bei iedem Hub ohne Zeitverluſt ſoviel Waſſer geben, als den ganzen Raum des ganzen Kolbenzugs füllen kann, ſo hat man, wenn ſeine Geſchwindigkeit v heiſt,

$$v = \frac{w}{t}$$

$$8.) = \frac{2w\sqrt{g}}{\text{B ſv}\ \frac{w}{c}\ \sqrt{2B} + \frac{c}{\sqrt{2B}} \cdot \left(\text{B ſv}\ \frac{w}{c}\ \text{ſin B ſv}\ \frac{w}{c}\right)}$$

wo aber k dem Π im folg. §. gleich genommen werden muß.

§. 246.

Wenn der Druck der Atmoſphäre auf den Kolben, durch eine auf demſelben ſtehende Waſſerſäule von der Höhe Π, ausgedruckt wird, die Höhe des niedrigſten Kolbenſtandes über der untern Oefnung der Saugröhre $= b'$ iſt, und die Tiefe der untern Oefnung der Saugröhre unter dem Waſſerſpiegel a heiſt, alſo $k - f = \Pi - (b' - a) = \Pi + a - b'$ iſt, ſo hat man bei der Vorausſetzung des vor. §. die Verhältnis der Mündungen des Stiefels und der Saugröhre aus der 8ten Formel

$$9.)\ \frac{m}{n} = \frac{2gw^2}{lv^2\left(\text{Bog ſv}\ \frac{w}{\Pi + a - b'}\right)^2} - \frac{e}{l}$$

§. 247

§. 247.

Aber was ich im 227 §. dieſer Erläuter. bei den Druckwerken erinnert habe, findet auch hier bei den Saugwerken ſeine Anwendung. Es kommt nämlich beim größten Effekt eines Saugwerks, nicht blos auf die Geſchwindigkeit des Kolbens an, die für ſich betrachtet die vortheilhafteſte wäre, ſondern es muß mit auf die Art der Kräfte, wodurch der Kolben bewegt werden ſoll, geſehen werden. Daher tadelt H. H. Karſten den Belidor mit Recht, daß ſolcher die vortheilhafteſte Einrichtung eines Saugwerks auf die Vorausſetzung (§. 245.), aus der die beiden Formeln no. 8; 9; hergeleitet ſind, gründet. Der Effekt des Saugwerks wird vielmehr deſto gröſſer, ie kleiner man bei einerlei f den Werth von l und ie gröſſer man n nimmt, wie die folgenden Formeln nun näher ergeben werden.

§. 248.

Für ein **doppeltes** Saugwerk, da nämlich zwei **völlig gleiche** Saugwerke ſo mit einander verbunden ſind, daß allemal der Kolben des einen ſteigt, wenn der des andern ſinkt, erhält man, wenn b die Höhe des ganzen Kolbenzugs, t die Zeit eines Kolbenſpiels, T iede gegebene Zeit und M die in der Zeit T durchs Saugwerk gehobene Waſſermenge bedeutet,

$$t : T = mb : M$$

$$\text{alſo } M = \frac{mb \cdot T}{t}$$

folglich nach der 7ten Formel, b ſtatt w geſetzt,

$$10.)\quad M = \frac{2\,m\,b\,T\sqrt{g}}{\text{Bog fv}\left(b : (k - f)\right) \cdot \sqrt{2\,\frac{mi}{n}}}$$

$$\text{oder} \quad = \frac{b\,T\sqrt{2\,m\,g\,n}}{\text{Bog fv}\left(b : (k - f)\right)\sqrt{l}}$$

wo k die Bedeutung (§. 242. d. Erl.) hat.

§. 249.

Auch hat man

$$11.)\quad k = f + \frac{b}{\text{fv Bog}\,\frac{t\sqrt{n\,g}}{\sqrt{2\,m\,l}}}$$

§. 250.

§. 250.

Aus der Formel no. 10. erhellet, daß wenn alles ungeändert bleibt, alsdann der Werth von M blos dadurch gröſſer wird, daß man n oder d vergröſſert d. i. daß man die Saugröhre weiter macht, ſo wie die Formel no. 11. zeigt, daß zu ebendem Effekt eine kleinere Kraft k erfodert wird, wenn man n vergröſſert, doch muß man hierbei allemal auf die Bemerkung (§. 243.) Rückſicht nehmen. Auſſerdem zeigt die letzte Formel auch, daß zu ebendem Effekt eine deſto geringere Kraft k nöthig iſt, ie gröſſer man t und ie kleiner man b nimmt, oder mit andern Worten, daß man zu ebendem Effekt deſto weniger Kraft braucht, ie langſamer der Kolben ſpielt, und ie kürzer der Kolbenhub iſt. Dieſes iſt mit den Formeln no. 10, 11; verglichen offenbar. Ein gröſſeres t in der Formel no. 11. giebt nämlich ein kleineres k, folglich wird der Quotient $\frac{2b}{k - f}$ und alſo auch Querſ. $\frac{2b}{k - f}$ deſto gröſſer, ie gröſſer t iſt, und daher, wie aus der Trigon. bekannt iſt, Bog. Querſ. $\frac{2b}{k - f}$ deſto kleiner, und der Werth von M (Formel no. 10.) alſo wieder deſto gröſſer. Endlich folgt noch aus beiden Formeln, daß der Effekt des Saugwerks auch deſto gröſſer wird, ie kleiner man l bei einerlei f nimmt, d. i. ie weniger man die Röhre gegen den Horizont neigt, und die vortheilhafteſte Stellung der Saugröhre iſt alſo die *vertikale*, weil durch ſolche das Waſſer in der kürzeſten Linie oder mit dem kleinſten l auf eine verlangte Höhe gelangt. Im Ganzen aber müſſen doch alle dieſe Werthe auf einander paſſen, weil ſonſt wirklich die angewandte Kraft leicht gröſſer werden könnte, als ſie zu Leiſtung des Effekts zu ſein brauchte, oder daß ein Theil der Kraft vergeblich angewandt würde, und daß daher wirklich nicht ieder Hub volles Waſſer gäbe. Wegen dieſes Umſtandes verdienen die beiden letztern Formeln noch eine nähere Betrachtung.

§. 251.

Die Einrichtung einer Maſchine iſt ohnſtreitig alsdann am vollkommenſten, wann man zu einerlei Effekt bei ihr die geringſte Kraft nöthig hat, alſo hier, wann in der 11ten Formel k den kleinſten Werth bekommt. Der Werth von k wird aber bei einerlei b und f am kleinſten, wann fv. Bog $\left(\frac{t\sqrt{ng}}{\sqrt{2ml}}\right.$ oder $\left.\frac{td\sqrt{g}}{D\sqrt{2l}}\right)$ am gröſten wird. Nun iſt bekanntlich

der größte Querſinus = 2; iſt alſo die Einrichtung der Maſchine ſo gemacht, daß $\frac{td\sqrt{g}}{D\sqrt{2l}} = \pi = 3{,}141$ alſo

$$12.)\quad \frac{d}{D} = \frac{3{,}141 \cdot \sqrt{2l}}{t\sqrt{g}}$$

wird, ſo hat die Maſchine oder das Saugwerk ſeine vollkommene Einrichtung.

§. 252.

Man ſieht übrigens, daß M und k ſich hier auf die Höhe f + b beziehen d. i. bis an den höchſten Kolbenſtand. Soll das Waſſer weiter in die Höhe über den höchſten Kolbenſtand treten, und ſo endlich vom Kolben bis zur Ausgußkännel gehoben werden, ſo iſt die ganze Maſchine kein bloſes Saugwerk mehr, ſondern von dem höchſten Kolbenſtand an, eigentlich ein Hebdruckwerk, und die Maſchine im Ganzen alſo eigentlich ein vereinbartes Saug- und Druckwerk. So fällt in die Augen, daß eigentlich durch ein bloſes Saugwerk, niemals Waſſer über den höchſten Kolbenſtand wirklich zu Tag gefördert werden kann; es muß alsdann allemal mit einem Druckwerk verbunden ſein.

§. 253.

Statt der Höhe f + b, auf welche die Waſſermenge M in der Zeit T vermittelſt des Saugswerks gebracht werden ſoll, muß man allemal die Höhe derjenigen Waſſerſäule gebrauchen, die nach der Natur der Saugwerke, der Kraft wirklich entgegendruckt, nämlich den Werth von k (11te Formel §. 249. dieſer Erl.) der alſo nie kleiner als f + b iſt. Bedeutet nun F die Waſſermenge in Cub. Fuſen, deren Gewicht der auf die Betreibung des Saugwerks angewandten Kraft gleich iſt, und α die Geſchwindigkeit dieſer Kraft, ſo iſt aus (Ꝟ no. III. §. 72. dieſer Erl.)

$$13.)\quad M = \frac{F\alpha T}{k}$$

alſo bei der vollkommenſten Einrichtung des Saugwerks, da $k = f + \frac{2b}{2} =$ f + b wird (hier §. 251.)

$$14.)\quad M' = \frac{F\alpha T}{f+b}$$

für die Waſſermenge, welche das Saugwerk bei ſeiner größten Vollkommenheit zur Höhe f + b bringen könnte, ohne auf die Friktion und ſonſtige Hinderniſſe zu ſehen.

Hat

Hat man in vorkommenden Fällen M' berechnet, so giebt sich daraus

$$M = \frac{f}{k} \cdot M'$$

$$\text{also (hier 249.)} = \frac{f \cdot M'}{f + b : \text{fv Bog } \frac{t\sqrt{ng}}{\sqrt{2ml}}}$$

$$= \frac{M'}{1 + b : f \cdot \text{fv B} \frac{td\sqrt{g}}{D\sqrt{2l}}}$$

Der Nenner dieses Bruchs heiße von nun an allemal λ, so hat man also

$$15.) \quad M = \frac{1}{\lambda} \cdot M'$$

da dann, wenn man

$$15^*) \quad \frac{f}{b} \text{ fv B } \frac{td\sqrt{g}}{D\sqrt{2l}} = w \text{ setzt, } \lambda = 1 + \frac{1}{w} \text{ ist.}$$

§. 254.

Wie die Friktion hierbei in Rechnung zu bringen ist, werde ich in den unten vorkommenden Anwendungen näher zeigen. Besonders ist bei Pumpen noch die zwischen den Flächen des Kolbens und der Röhrenwand entstehende Friktion, wohl zu erwägen; sie soviel möglich zu vermindern, muß man den Kolben in der Länge soviel möglich abkürzen, welches auch deswegen nöthig ist, damit der durch die Kolbenöfnung verursachte schädliche Raum gleichfalls soviel möglich vermindert werde. Von der vortheilhaftesten Anlage eines Saugwerks wird noch unten (§. 264.) was vorkommen.

Wiederholung der vornehmsten Formeln aus der Lehre von den Druckwerken.

§. 255.

Wenn ich hier Formeln wiederhole, die im Kästnerischen Lehrbuch schon vorgetragen sind, so geschieht es hauptsächlich nur des Numerirens wegen, welches mir ihren Gebrauch in der Folge etwas bequemer macht.

Digitized by Google

§. 256.

Für ein doppeltes Druckwerk, wie (K. 697.), iſt, wenn t die Zeit eines Kolbenſpiels bedeutet, die Waſſermenge, die das Druckwerk in gegebener Zeit T hebt nach (K. 696.)

$$16.)\quad M = \frac{\frac{1}{2}\pi a^2 b \cdot T}{t}$$

und für eine Stunde nach (K. 707.)

$$17.)\quad M = 12611 \cdot c \sqrt{\frac{b}{l}} (K + \tfrac{1}{4}\pi a^2 g') \quad *)$$

§. 257.

Gleichfalls nach (K. 707.) hat man für die Zeit eines Kolbenſpiels,

$$18.)\quad t = 0{,}4484 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{bl}}{c\sqrt{(K - \frac{1}{4}\pi a^2 g')}}$$

§. 258.

Aus (K. 733. VI.) iſt

$$19.)\quad p = g' + \frac{0{,}256 \cdot l \cdot b \cdot a^2}{c^2 t^2}$$

wo p die Höhe der Waſſerſäule bedeutet, deren Druck dem Druck auf die unterſte Stelle der Steigröhre gleich iſt.

§. 259.

Folgerungen aus dieſen Formeln ſind: wenn man die Verhältnis $\frac{a}{c}$ einmal beſtimmt hat, ſo gehört zur Vollkommenheit des Druckwerks

1. daß man zur Leitung der Steigröhre den kürzeſten Weg wähle oder l ſo kurz als möglich nehme, folglich ſo wenig als möglich gegen den Horizont neige. Die völlig vertikale Stellung iſt alſo die vortheilhafteſte
2. daß man keinen groſſen Kolbenzug wähle, oder b klein ſei.
3. daß der Kolben nur langſam auf- und niederſpiele oder t groß gewählt werde.

§. 260.

*) Weil g gewöhnlich 15,625 Rhl. Fus bedeutet, ſo habe ich aller Verwirrung vorzubeugen hier g' ſtatt des Käſtnerſchen g geſchrieben.

§. 260.

Weil p den Druck bedeutet, den das in die Höhe getriebene Waſſer, auf die unterſte Stelle der Saugröhre ausübt, ſo hat man hier wie in der 13ten Formel

$$20.)\quad M = \frac{F\alpha T}{P}$$

alſo aus der Formel no. 19.

$$21.)\quad M = \frac{F\alpha T}{g' + \frac{0,256 \cdot l \cdot b \cdot a^2}{c^2 t^2}}$$

Für die Gränze der Waſſermenge, welche die wirklich gehobene Waſſermenge niemals übertreffen kann, hat man demnach

$$22.)\quad M' = \frac{F\alpha T}{g'}$$

Aber aus no. 21. iſt auch $M = \frac{F\alpha T : g'}{1 + \frac{0,256 \cdot l \cdot b : a^2}{g' c^2 t^2}}$

Setzt man alſo

$$23.)\quad \lambda = 1 + \frac{0,256 \cdot l \cdot b \cdot a^2}{g' c^2 t^2}$$

ſo hat man

$$24.)\quad M = \frac{1}{\lambda} \cdot M'$$

Und wenn man weiter

$$25.)\quad \frac{0,256 \cdot l \cdot b \cdot a^2}{g' \cdot c^2 \cdot t^2} = \frac{1}{\blacktriangledown}$$

ſetzt, ſo hat man

$$26.)\quad \lambda = 1 + \frac{1}{\blacktriangledown}$$

da dann

$$27.)\quad \blacktriangledown = \frac{g' \cdot c^2 \cdot t^2}{0,256 \cdot l \cdot b \cdot a^2}$$

wäre.

§. 261.

Die bisherigen Formeln für M beziehn sich allemal auf ein doppeltes Druckwerk. Um M für n Paar Pumpen zu erhalten, darf man nur na^2 statt a^2 schreiben. Soll die Maschine durch ein Rad betrieben werden, dessen Halbmesser r ist, und dessen Umlaufszeit $= \vartheta$, so hat man

$$28.) \quad \vartheta = \frac{2\pi r}{u}$$

Betreibt dieses Rad ohne weiteres Getriebe unmittelbar das Druckwerk, so kommt auf ieden Umgang des Rades ein Kolbenspiel daß also $\vartheta = t$ wird. Vermittelst Getriebe aber kann man auf einen Umgang des Rades mehr oder weniger Kolbenspiele bringen, so daß $\vartheta <$ oder $> t$ wird, das sich so ausdrucken läßt $\vartheta = \mu t$ also aus no. 28.

$$29.) \quad t = \frac{2\pi r}{\alpha\mu}$$

§. 262.

Diese Formeln dienen zur vortheilhaften Einrichtung des Druckwerks so:

I. Eigentlich sollte man $\frac{a}{c} < 1$ nehmen; aber **theils** wegen des allenfalls zu befürchtenden Rückfalls, des in der Steigröhre befindlichen Wassers, wenn die Oefnung durch die Klappe nicht geschwind genug sollte verschlossen werden, da dann bei einer sehr weiten Steigröhre zuviel zurückfallen würde; **theils** auch weil eine weitere Röhre, nicht nur wegen ihres grössern Umfangs, sondern auch wegen ihrer erforderlichen grössern Wanddicke, sehr viel mehr Metall nöthig hat, als eine engere, und daher sehr kostbar werden könnte, so nimmt man gewöhnlich $\frac{a}{c} > 1$. Freilich sollte man besonders bei Berg- und Salzwerken, wo die angewandten Kosten sich selbst wieder bezahlt machen, solange man nicht Bewegungskräfte zum Ueberfluß hat, bei dergleichen Maschinen auf die ersten Auslagen gar nicht sehen — man sollte bedenken, daß **Geldausgaben** scheuen und **kameralisch** denken ganz verschiedene Dinge sind oder doch sein sollten. Aber solange sich ganze Finanzcollegien altväterischen Grundsätzen zuschwören, muß selbst der Mathematikverständige, wenn er doch für die wirkliche Welt schreiben will, bei seinen Berechnungen, sich eben sowohl um Hindernisse von dieser Art bekum-

kümmern, wie er auf Friktion und andere unvermeidliche Hinderniſſe in der Ausübung zu ſehen hat.

II. Für l nimmt man den kürzeſten Weg, den man zur Leitung der Steigröhre nehmen kann.

III. t nimmt man gleichfalls etwas groß. Und das erhält man, wenn man μ verkleinert, oder bei unterſchlächtigen Rädern r groß nimmt. Nähere Beſtimmungen werden unten vorkommen.

IV. b nimmt man gleichfalls klein. Nach dieſen vorläufigen Beſtimmungen giebt ſich der Werth von w aus der 27ten Formel, und dann aus der 26ten der Werth von λ; hierauf endlich, nachdem man M' durch die Formel no. 22. beſtimmt hat, auch der Werth von M aus der 24ten. Weil man nun blos die **Verhältnis** a : c willkührlich angenommen, a und c aber für ſich noch nicht beſtimmet hat, ſo giebt ſich für n Paar Pumpen aus der Formel no. 16. na^2 ſtatt a^2 geſetzt,

$$30.) \quad a = \sqrt{\left(\frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi n b T}\right)}$$

woraus ſich dann c von ſelbſt ergiebt, nämlich

$$31.) \quad c = \frac{c}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi n b T}\right)}$$

§. 263.

Nach Hrn. **Eulers** Urtheil, iſt das Druckwerk noch gut eingerichtet, ſolange w nicht < 10 iſt.

§. 264.

Völlig auf ähnliche Art, erhält man eine vortheilhafte Einrichtung der Saugwerke, weil für ſie aus den Formeln eben die Folgerungen gelten, wie für die Druckwerke.

I. Man ſuche alſo für dieſe zuerſt $M' = \frac{F\alpha T}{f}$ und ſetze deswegen, um α zu erhalten, den Werth von b, den man klein nimmt, und dann die Werthe von t und ϑ zuvor feſt, welche beide man wie vorhin etwas groß nehmen muß, woraus ſich dann $a = \frac{2\pi t}{\vartheta}$ ergiebt.

II. Um

II. Um nun nach der 15ten Formel $M = \frac{M'}{\lambda}$ zu erhalten, nehme man den Quotienten $\frac{d}{D}$ gehörig an, wie ſich aus der 12ten Formel ergiebt. Auch muß man hier l ſo klein als möglich nehmen, alſo nicht nur die Saugröhre ſenkrecht aufführen, ſondern auch ſo wenig als möglich unter Waſſer ſtellen.

III. Nach dieſen Vorausſetzungen hat man aus der Formel no. 15 *.

$$w = \frac{f}{b} \cdot \text{Querſ. Bog}\left(\frac{d \cdot t \cdot \sqrt{\left(\frac{g}{2l}\right)}}{D}\right)$$

wo die Abmeſſungen (nach der 12ten Formel) ſo gewählt ſein müſſen, daß der Querſ. = 2 wenigſtens ſehr nahe ſo groß iſt, welches dann $w = 2f : b$ giebt.

IV. Weil man nur den Quotienten $\frac{d}{D}$ hat, aber nicht d und D für ſich, ſo hat man noch, wenn n doppelte Saugwerke vorhanden ſind, die Formel no. 30. wo D ſtatt a geſetzt werden muß, zu gebrauchen, und das giebt zugleich

$$32.) \quad d = \frac{d}{D} \cdot \sqrt{\left(\frac{Mt}{\frac{1}{2}\pi n b T}\right)}$$

Von vereinbarten Saug- und Druckwerken.

§. 265.

Wenn ein Saug- und Druckwerk mit einander verbunden, das Waſſer bis auf eine gegebene Höhe heben ſoll, ſo iſt der Theil der Höhe, auf die das Waſſer durch Saugwerk kommt d. i. vom Waſſerſpiegel bis zum höchſten Kolbenſtand = f + b; der Theil der Höhe, auf welche das Waſſer vermittelſt des Druckwerks über die höchſte Stelle des Kolbens getrieben wird, heiſe e; ſo wird man für die Ausübung die eigentlichen Druckwerke von den Hebdruckwerken unterſcheiden müſſen.

1. Für

1. Für die Hebdruckwerke ist die ganze Höhe, auf die das Wasser beim vereinbarten Saug- und Druckwerk gedruckt wird = e

2. Für die eigentlichen Druckwerke ist solche > e; wenn nämlich das Wasser bis zur Höhe f + b hinaufgesogen ist, und also den Stiefel bis zur Höhe b angefüllt hat, ausserdem auch die ganze Steigröhre mit Wasser angefüllt ist, so ist die ganze vertikale Höhe der mit Wasser gefüllten Steigröhre = e + b; im Anfang, wenn der Kolben aus seiner höchsten Stelle zu sinken anfängt, ist also die Höhe der fortzudruckenden Wassersäule noch = e, je weiter er sinkt, desto grösser wird diese Höhe, und wenn er die tiefste Stelle erreicht, ist sie = e + b. Ich setze sie daher im Mittel = e + $\frac{1}{2}$b. Um daher die Formeln für beide Arten zugleich brauchbar zu machen, will ich die Höhe, auf die beim vereinbarten Saug- und Druckwerk das Wasser durch das Druckwerk getrieben wird, = g′ setzen, da dann

$$33.)\quad g' = e + \tfrac{1}{2}b \pm \tfrac{1}{2}b$$

ist, und das obere Zeichen auf eigentliche Druckwerke, das untere aber auf Hebdruckwerke geht.

§. 266.

Wenn die gesammte Höhe, auf die das Wasser durch das vereinbarte Saug- und Druckwerk gehoben wird, d. i. e + f + b = h ist, so hat man nach den bisherigen Bedeutungen der Buchstaben

$$34.)\quad M' = \frac{F\alpha \cdot T}{h}$$

und

$$35.)\quad M = \frac{F\alpha \cdot T}{\nu(f+b) + \lambda \cdot g'}$$

wo ich ν statt des bei den Saugwerken oben gebrauchten Buchstabens λ gesetzt habe, um es nicht mit dem λ, welches dem Druckwerk zugehört, zu verwechseln.

§. 267.

Ein vereinbartes Saug- und Druckwerk bequem anzulegen, müßte man nun dem Bisherigen gemäß so verfahren.

I. Man ordne zuerst das Druckwerk gehörig an, und bestimme daher für solches die Grössen l, e, b, $\frac{c}{a}$ und t willkührlich, iedoch denen bisherigen Gründen gemäß.

II. Daraus giebt sich nach der Formel no. 33. g'

III. und nun w aus der Formel no. 27. und dann λ aus no. 26.

IV. Nun berechne man das Saugwerk.

Man nehme also $\frac{d}{D} = \frac{3,141\sqrt{2l}}{t\sqrt{g}}$

(Form. no. 12.), wo offenbar t nicht noch einmal willkührlich angenommen werden kann, sondern seinen vorigen Werth behalten muß; der Werth von l aber giebt sich von selbst.

V. Aus no. 15 * giebt sich nun w und zugleich $\nu = 1 + \frac{1}{w}$ da dann $w = \frac{2f}{b}$ ist.

VI. h ist gegeben und aus den Formeln no. 34; 35; giebt sich daher auch M.

VII. Und nun a = D aus der Formel no. 30. Endlich

VIII. c und d aus den Formeln no. 31 und 32.

§. 268.

Das Bisherige ist hinreichend, alle die Pumpenwerke betreffende Aufgaben, aufzulösen; ich beschliese also hiermit diese Lehre. Zur weitern Erläuterung, Anwendung und näherer Bestimmung bisheriger Lehren, wird es mir nun erlaubt sein, in den folgenden Sätzen, den Gebrauch solcher Untersuchungen auf Salzwerken zu zeigen. Ich habe hierüber schon im Jahr 1779. einen Aufsatz an die Kurf. ökonomische Gesellschaft zu Lautern überschickt, der auch im vorigen Jahr besonders erschienen ist. Weil mir aber nach dieser Zeit, vielerlei Zusätze und Verbesserungen beigefallen sind, so habe ich es für gut gefunden, die ganze damalige Abhandlung umzuarbeiten und die umgearbeitete hier beizufügen, weil sie die hydrodinamischen Lehren, in ein viel helleres Licht setzen wird, welches ich auch nicht ohne besondere Bewilligung der ökonomischen Gesellschaft gethan habe.

Ueber

Ueber

die sichere Berechnung und vortheilhafte Anordnung der Bewegungskräfte auf Salzwerken.

I. Von unterschlächtigen Rädern.

§. 269.

Wenn ein unterschlächtiges Rad das Gefälle a hat, so ist die zu diesem Gefälle gehörige Geschwindigkeit $c = 2\sqrt{ga}$ also in Rhl. Fusen

$$36.) \quad c = 7{,}906\sqrt{a}$$

Um nun mit diesem Rad den größten Effekt zu erhalten, muß man ihm eine Geschwindigkeit zu geben suchen, bei der die Mittelpunkte der Schaufeln *) mit einer Geschwindigkeit $= \frac{1}{3}c = \frac{7{,}906 \cdot \sqrt{a}}{3}$ (K. §. 361.) herumgehen. Heißt des Rades vortheilhafteste Geschwindigkeit γ, so ist

$$37.) \quad \gamma = 2{,}635 \cdot \sqrt{a}$$

§. 270.

Wenn des Rades Halbmesser d. h. die gerade Linie vom Mittelpunkt des Wellbaums bis an den Mittelpunkt einer Schaufel, r heist, so ist des Rades Umfang, worin die Mittelpunkte der Schaufeln liegen, $= 3{,}141 \cdot 2r = 6{,}282 \cdot r$, und die Anzahl seiner Umdrehungen in einer Sec. $= \frac{2{,}635 \cdot \sqrt{a}}{6{,}282 \cdot r}$, also in einer Minute, wenn sie μ heist.

*) Eigentlich müßte man den Mittelpunkt des Stoses nehmen, der mit dem Mittelpunkt der Schaufel nicht genau einerlei ist. Aber in der Ausübung ist an dergleichen mathematische Schärfe nicht zu denken.

Digitized by Google

$$\mu = 60 \cdot \frac{2,635 \cdot \sqrt{a}}{6,282 \cdot r} \text{ oder}$$

$$38.) \quad \mu = \frac{25,175 \cdot \sqrt{}}{r}$$

§. 271.

Aus der oben vorgetragenen Lehre von den unterschlächtigen Rädern, weis man, daß der gröſte Effekt des unterschlächtigen Rades, gar nicht von der Grösse des Rades abhängt; man könnte also die Grösse des Rades willkührlich, und daraus μ, nach der 38ten Formel bestimmen. Das umgekehrte Verfahren scheint mir aber vorzüglicher, daß man nämlich μ festsetze und nun r daraus bestimme; man hat nämlich aus der vorigen Formel

$$39.) \quad r = \frac{25,175 \cdot \sqrt{a}}{\mu}$$

Dieses Verfahren, μ festzusetzen, und r daraus zu suchen, ist deswegen nöthig, um weder eine schädliche Geschwindigkeit, noch eine nachtheilige Langsamkeit des Rades zu erhalten. Bei ersterer hat man den Nachtheil, daß der Effekt der Maschine desto geringer wird, ie geschwinder die Kolben in den Stiefeln hin und her bewegt werden (hier §. 250. 262;) *) und bei letzterer 1.) diesen, daß die gesammte Friktion nicht geschwind genug überwunden wird, so daß die Pumpenstangen keine stetige, sondern eine zitternde Bewegung erhalten, wodurch der Effekt der Maschine vermindert wird, 2.) noch den beträchtlichen Nachtheil, daß, um einerlei Wassermenge aufzufördern, wegen des langsamern Gangs der Pumpen, ihre Anzahl, oder die Weite der Stiefeln vergrössert werden muß, welches die Friktion der Kolben an den Wänden der Stiefeln beträchtlich verstärken kann. So müßte man z. B. auf einem Gradirbau, wo man bei einer gewissen Geschwindigkeit der Kolben nur 8 Pumpen brauchte, schon 16 Pumpen von eben der Art nehmen, wenn die Kolben nur halb so geschwind spielen sollten, wodurch dann die Friktion ungemein vergrössert würde —. Soviel hat man bei aller Theorie dennoch zu überlegen, wenn

*) Hieraus ersieht man auch, wie leicht es ist, dem Rad seine vortheilhafteste dem 136ten Satz K.) gemässe Geschwindigkeit zu geben, ohne dadurch eine nachtheilige Geschwindigkeit der Kolben zu erhalten, da solche ohnehin auch auf die Grosse der Kurbeln ankommt, und daher allemal nach Verlangen eingerichtet werden kann, das Rad mag geschwind oder langsam gehen. Daher irren diejenigen sehr, welche die Parentsche Theorie (K. 364.) als unnütz verwerfen.

wenn man in der Ausübung vortheilhafte Anlagen machen will! Um allen diesen Ungemächlichkeiten vorzubeugen, und um zugleich den Kunst- und Brunnenmeistern auf Salzwerken, alle Beschönigung ihrer nachtheiligen Einrichtungen zu entreisen, habe ich die Erfahrung mit zu Hülf genommen, um auf Salzwerken auch hierin gewisse allgemeine Regeln vorzuschreiben, zu deren Befolgung dergleichen eigensinnige Leute angehalten werden können. Für alle Arten von Rädern bemerke ich zuerst folgende allgemeine Regel:

I. **Die Einrichtung muß so gemacht werden, daß sich bei einem zusammengesetzten *) Pumpenwerk, die Kolben in den Stiefeln, mit einer Geschwindigkeit von 8 Zoll = $\frac{2}{3}$ F. in einer Sec. bewegen.**

§. 272.

Wenn die Höhe des Kolbenhubs in Fusen = b ist, so muß bei einer iedesmaligen Umdrehung des Rades, der Kolben einen Weg = 2b durchlaufen, also in einer Minute einen Weg = $\mu \cdot 2b$ (hier §. 270.). Nun soll seine Geschwindigkeit für eine Sec. = $\frac{2}{3}$ Fus sein, also für eine Minute = $60 \cdot \frac{2}{3}$ = 40 F. das giebt $40 = \mu \cdot 2b$ also

$$40.) \quad \mu = \frac{20}{b}$$

§. 273.

Die Höhe des Kolbenhubs, folglich auch die Höhe der Kurbel, darf schon wegen der aus den Formeln gefolgerten Regeln (hier §. 250; 262;) nicht groß sein. Ausserdem aber erfordert solches in der Ausübung, noch ein besonderer Umstand, ich meine die gewöhnliche mechanische Einrichtung, wodurch die Kolbenstange auf- und niederbewegt wird. Sie hängt nämlich an einem Hebelarm, der sich in einer vertikalen Ebene auf und niederbewegt, und sich zugleich um eine gewisse Axe dreht. Die Stelle selbst, woran die Kolbenstange hängt, muß auf solche Art in den Bogen eines Kreises, dessen Halbmesser der Arm ist, auf- und niedergehen, und ie höher nun der Hub ist, desto grösser ist der Winkel, um den die Kolbenstange aus ihrer vertikalen Stellung seitwärts gezwängt wird, wodurch dann nicht nur die Friktion des Kolbens an der Stiefelwand ungemein vergrössert, sondern überdas zugleich das Moment der Kraft wegen

*) d. h. eine Verbindung mehrerer völlig ähnlicher Pumpenwerke, die so eingerichtet ist, daß allemal zu gleicher Zeit, die halbe Anzahl von Kolben niederwärts, und die andere Hälfte aufwärts geht.

der ſchiefen Richtung vermindert wird. Alſo hat man alle Urſache, ſehr ſorgfältig auf einen kurzen Hub zu ſehen. Und ich glaube, daß folgende Vorausſetzung verſtattet iſt:

Man ſehe 3 und 4 Fus als die Gränzen an, zwiſchen welchen man die Höhe des Kolbenzugs annimmt.

Dieſe noch ziemlich unbeſtimmte Regel ſoll ſogleich näher beſtimmt werden.

§. 274.

Wenn man a nicht < 4 Fus hat, ſo zeigt (K. 401. no. IIII.) zumal mit (K. 381.) verglichen, daß es nicht rathſam ſei unterſchlächtige Räder zu gebrauchen, alſo kann man zugleich folgende Regel feſtſetzen:

II. *Man ſehe o und 4 Fus als die Gränzen des Gefälles an, wobei man ſich der unterſchlächtigen Räder zu bedienen hat.*

Weil das Moment der Laſt mit der Länge der Kurbel wächſt, und das Moment der Kraft, mit der Höhe des Gefälles; ſo kann man bei gröſſerm Gefälle auch den Kolbenzug gröſſer nehmen. Und weil die Höhe des Kolbenzugs und des Gefälles, zwiſchen die genannten Gränzen fällt, ſo folgere ich hieraus:

III. *Man nehme bei unterſchlächtigen Rädern die Höhe des Kolbenzugs um den vierten Theil von der Höhe des Gefälles über 3 Fus.*

§. 275.

Man ſetze in die 39te Formel den Werth von μ aus der 40ten, ſo hat man

41.) $$r = 1{,}258 \cdot b\sqrt{a} = 1{,}258 \cdot \left(3 + \frac{a}{4}\right) \times \sqrt{a}$$

Das giebt zu Beſtimmung der Gröſſe eines unterſchlächtigen Rades folgende Regel:

IIII. *Um den Halbmeſſer eines unterſchlächtigen Rades zu beſtimmen, multiplicire man die Höhe des Kolbenzugs, mit der Quadratwurzel aus dem Gefälle, und was herauskommt aufs neue mit 1,258 oder nur mit $\frac{1}{4}$.*

Ex. Man ſoll bei einem Gefälle von $\frac{1}{2}$ Fus, den Halbmeſſer eines anzulegenden unterſchlächtigen Rades angeben.

Aufl. Hier ist $r = 1{,}258 \cdot \left(3 + \frac{1:2}{4}\right) \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 1{,}258 \cdot 3{,}125 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ also im Logarithmen

	l 1,258	= 3,0995806 — 3
add.	l 3,125	= 3,4948500 — 3
		= 3,5945306 — 3
Abgez.	$\frac{1}{2}$ l2	= 0,1505150
	lr	= 3,7450456 — 3

also der gesuchte Halbmesser r = 5,56 Fus und des Rades Durchmesser = 2 · 5,56 = 11,12 Fus.

Auf dem Salzwerk zu Oldeslohe im Hollsteinischen, hat man ohngefähr zu solchem Gefälle, ein Rad von erstaunender Grösse angelegt, dessen Durchmesser gegen 40 Fus betragen soll.

§. 276.

Der größte Werth von a ist nach der zwoten Regel 4 Fus; also das größte $\frac{1}{2}r = 1{,}258 \cdot (3 + \frac{1}{4}) \sqrt{4} = 1{,}258 \cdot 4 \cdot 2 = 10{,}064$ Fus. Hieraus folgt:

V. **Man soll auf einem Salzwerk kein unterschlächtiges Rad haben, dessen Durchmesser über 20 Fus wäre.**

Bemerkung über den Krummzapfen.

§. 277.

Bekanntlich verändert sich das Moment der an der Warze des Krummzapfens angebrachten Kraft, wegen der Kreisförmigen Bewegung der Warze alle Augenblick, und macht dadurch den Gang des Rades etwas ungleichförmig. Mir ist aber noch ein anderer Umstand beigefallen, der gleichfalls in die Bewegung des Rades einen Einfluß hat, und der meiner wenigen Einsicht nach in den Formeln, welche die Berechnung der Wasserräder betreffen, bemerkt werden muß. Ich will diesen Umstand kurz die Veränderung des Moments wegen der Dicke des Wellzapfens nennen.

§. 278.

§ 278.

Indem die Kurbel ab (fig. 45.) vertikal aufwärts ſteht, iſt der Abſtand der Laſt vom Umdrehungspunkt = cd, und wann ſolche vertikal unterwärts ſteht wie (fig. 46.), iſt ſolcher = γδ, und der Unterſchied cd — γδ, iſt der Durchmeſſer des Wellzapfens. Alſo nimmt dieſes Umſtandes wegen, das Moment der Laſt von dem höchſten bis zum tiefſten Stande der Warze, beſtändig ab, und wird von da an wieder gröſſer, ſo daß es gar wohl Fälle geben kann, wo das Moment von einerlei Laſt an der höchſten Stelle der Warze, über ein Drittheil gröſſer iſt, als an der tiefſten.

§. 279.

Der äuſere Kreis (fig. 47.) ſtelle den Weg des Mittelpunkts der Warze, und der innere den Umfang des Wellzapfens vor, die dann beide koncentriſch ſind und c zum Mittelpunkt haben. Durch a ziehe man eine Horizontallinie de, die den innern Kreis bei a berührt. Zöge nun die Laſt beſtändig nach einer auf die Kurbel ſenkrechten Richtung, ſo wäre, die Laſt = 1 geſetzt, ihr Moment in b = ab, in f = af in h = ah, in k = ak u. ſ. w. Zieht man mn durch c horizontal, ſo wäre, wann der Warze Mittelpunkt in n läge, der Laſt Moment = an. Theilt man nun mn in o in zwei gleiche Theile, ſo kann man hier ohne merklichen Fehler ao = co = cn ſetzen, und wann alſo der Mittelpunkt der Warze in o kommt, ſo iſt der Laſt Moment = ao = den Halbmeſſer cn. Solang demnach der Mittelpunkt der Warze über der Horizontallinie op liegt, iſt das Moment der Laſt > q, cn = q geſetzt, und ſolang ſolcher unter op liegt, iſt das Moment < q.

§. 280.

Wenn nur durch mbn die Laſt in der Entfernung > q, und dann durch nkm = mbn in der Entfernung < q vom Bewegungspunkt abſtünde, ſo könnte man für den mittlern Abſtand der Laſt vom Bewegungspunkt, oder für die mittlere Kurbelhöhe, die Länge $\frac{ab + as}{2} = q$ annehmen, wenn gleich die Laſt wegen der Umdrehung der Kurbel, nicht beſtändig ſenkrecht an ſelbiger zieht, weil ſich dieſe Richtung doch unter op eben ſo ändert, wie über op; und wirklich nehmen auch alle Schriftſteller, ſo viel ich ihrer kenne, q als die Höhe der Kurbel an, welche ſie in den Rechnungen gebrauchen, ohne weiter die Veränderung des Moments wegen der Dicke des Wellzapfens, dabei in Betrachtung zu ziehen. Da aber der gröſſere Abſtand durch den Bogen pbo und der, welcher < q iſt, nur durch den Bogen osp < pbo dauert, ſo hat man genauer

die

$$\text{die mittlere Kurbelhöhe} = \frac{\text{Bog pbo}}{\text{Bog mbn}} \cdot q$$

Nun läßt sich hier mp + no = ca setzen, und da weiter mbn = 3,141 · q. so hat man, den Halbmesser des Wellzapfens ca = ϱ gesetzt, den Bogen pbo = 3,141 · q + ϱ, also

$$\text{die mittlere Kurbelhöhe} = \frac{3{,}141 \cdot q + \varrho}{3{,}141 \cdot q} \cdot q$$

oder weil ϱ ohnehin allemal klein ist,

42.) die mittlere Kurbelhöhe = $9 + \frac{1}{7}\varrho$

Ex. Es sei q = 10 Zoll, ϱ = 2,5 Zoll, so ist $\frac{1}{7}\varrho$ = 0,83 Z. und die mittlere Kurbelhöhe = 10,83 Z. statt daß sie gewöhnlich hier schlechtweg = 10 Z. also um $\frac{1}{11}$ zu gering in die Rechnung gebracht würde, welches die ganze Rechnung merklich ändern kann.

§. 281.

Die Veränderung des Moments wegen der Dicke des Wellzapfens hat also die Folge, daß wenn q wie gewöhnlich angenommen und so der Kolbenhub = 2q gesetzt wird, alsdann in dem Werth von M, $\frac{q}{q + \frac{1}{7}\varrho} \cdot Z$ statt Z, und wenn Z aus M gesucht wird, $\frac{q + \frac{1}{7}\varrho}{q} \cdot Z$ statt des gefundenen Z in der Ausübung sicher gebraucht werden könne, wo ich nämlich unter Z das für iede Sec. erforderliche Aufschlagwasser, um die Wassermenge M dadurch iede Sec. aufzufördern, verstehe.

Ueber die Friktion bei unterschlächtigen Rädern.

§. 282.

Bedeutet r den Halbmesser des Rades bis in die Mitte der Schaufeln gerechnet, und ist die an die Schaufel stosende Kraft = dem Gewicht einer Wassermenge P, das gesammte Gewicht des leeren Rades sammt dem Krummzapfen = p, und die Kraft, die am Umfang des Rades nach einer Tangente desselben angebracht, der Friktion an den Wellzapfen des mit Wasser beschwerten und so herumgetriebenen Rades das Gleichgewicht hält, = dem Gewicht

einer Wassermenge φ wo ich alles in Rhl. Fusen verstehe; so hat man, die Friktion $= \frac{1}{3}$ vom Druck gerechnet,

$$\varphi = \left(\frac{p + \frac{4}{5} P}{3r}\right) \cdot \varrho \quad *)$$

aber $P = \frac{Z}{2\sqrt{gh}} \quad kh = \frac{kZ}{2}\sqrt{\frac{h}{g}}$ wo ich das Gefälle h statt des bisherigen a genennt habe, und k den Eulerschen Koeff. bedeutet.

Das giebt also

$$\varphi = \frac{\left(p + \frac{4}{5}\frac{Z}{2} \cdot k\sqrt{\frac{h}{g}}\right) \cdot \varrho}{3r} \quad \text{oder}$$

$$43.) \quad \varphi = \frac{\left(p + \frac{2k}{9} Z \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{g}\right)}\right) \cdot \varrho}{3r}$$

Bemer-

*) Es ist zwar nur der Druck p vertikal und der andere Theil $\frac{4}{5}$ P horizontal, daher eigentlich statt $p + \frac{4}{5} P$ im Zähler, der mittlere Druck $\sqrt{(p^2 + (\frac{4}{5} P)^2)}$ stehen sollte. Ich habe aber mit Fleis lieber $p + \frac{4}{5} P$ beibehalten wollen, weil es hier ohne Irthum angeht, die folgenden Formeln aber dadurch eine viel geschmeidigere Gestalt bekommen. Die folgenden Formeln enthalten nämlich allemal, wie man finden wird

$$p + \frac{3\sqrt{r}}{\varrho} \text{ statt } p$$

da dann

$$\sqrt{\left(\left(p + \frac{3\sqrt{r}}{\varrho}\right)^2 + \left(\tfrac{4}{5} P\right)^2\right)}$$

von

$$p + \frac{3\sqrt{r}}{\varrho} + \tfrac{4}{5} P$$

nur sehr wenig unterschieden sein kann, weil $(\frac{4}{5} P)^2$ allemal nur ein sehr geringer Theil von $\left(p + \frac{3\sqrt{r}}{\varrho}\right)^2$ ist.

Digitized by Google

Bemerkung über die Größe der Schaufeln und des für sie nöthigen Spielraums in der Rinne.

§. 283.

Die Größe der Schaufelflächen eines unterschlächtigen Rades zu bestimmen.

Aufl. Des anschlagenden Wasserstrahls Querschnitt ist $\frac{Z}{2\sqrt{gh}}$; aber weil die Schaufeln nur mit dem dritten Theil der Geschwindigkeit fortgehen sollen, mit der das Wasser anschlägt, so muß wegen dieses langsamern Ganges der Schaufeln, ein großer Theil des geschwinder ankommenden Wassers zurückgehalten werden, wenn man die Schaufelfläche wirklich nur $= \frac{Z}{2\sqrt{gh}}$ macht; soll also das Wasser gehörig fortfließen können, so müssen die Schaufeln desto gröſſer gemacht werden, und es erhellet, daß man sie wenigstens doppelt so groß als den berechneten Querschnitt machen müße.

Nennt man also die Schaufelfläche η, so gäbe das

$$44.) \quad \eta = 2 \cdot \frac{Z}{2\sqrt{gh}} = \frac{Z}{\sqrt{gh}} .$$

η noch gröſſer zu nehmen wäre wohl nicht rathsam.

§. 284.

Vielerlei Ursachen machen den Schaufeln in der Rinne, wodurch sie streichen müssen, sowohl unten als neben zu beiden Seiten einen Spielraum nothwendig, der aber zugleich einigen Verlust des Aufschlagwassers unvermeidlich macht. Ich will die Fläche des Spielraums allgemein $= \frac{f}{m}$ von der Schaufelfläche, die den Wasserstos erhält, setzen, so ist der Verlust des Aufschlagwassers ohngefähr $\frac{Z}{m}$ und man benutzt also statt Z nur $Z - \frac{Z}{m} = \frac{(m - 1) \cdot Z}{m}$

§. 285.

Dagegen tritt bei dieser Einrichtung folgender wichtige Umstand ein, daß die Schaufel beträchtlich gröſſer als der berechnete Querschnitt des anschlagen-

den Wasserstrahls wird, und dieser Umstand giebt die Folge, daß sich der Wasserstrahl hier wirklich an der Schaufelfläche hinreichend ausbreiten kann. In Fällen, wo der Strahl zur Seite ausweichen kann geht es freilich nicht an, die oben erwähnte **mehr als einfache** Wassersäule zu gebrauchen. Hier aber, wo wegen des rings um die Schaufel durch den Spielraum beständig stark durchschiessenden Wassers, der gegen die Schaufel stossende Strahl keinen Raum hat, irgendwo zur Seite auszuweichen, ist er genöthigt sich nach der obern Gränze der Schaufel auszubreiten, oder an der Schaufelfläche hinaufzusteigen, zumal da es dreimal so schnell ankommt, als ihm die Schaufelfläche ausweicht. Aus dieser Ursache nehme ich keinen Anstand, auch hier (nach Erl. zu K. 344. daselbst η statt Q und $\frac{Z}{2\sqrt{gh}}$ statt des dortigen Z gesetzt.)

$$\frac{2\cdot(m-1)\cdot Z}{m}\cdot\left(1-\frac{Z:2\sqrt{gh}}{2\eta}\right)$$ oder

η statt $Z:\sqrt{gh}$ nach der 44ten Formel gesetzt,

$$\frac{2\cdot(m-1)\cdot Z}{m}\cdot\left(1-\frac{\eta:2}{2\eta}\right)$$ oder

$$\frac{2\cdot(m-1)\cdot Z}{m}\cdot\left(1-\tfrac{1}{4}\right)$$ d. i.

$$\frac{3\cdot(m-1)\cdot Z}{2m}$$ statt des einfachen $\frac{(m-1)\cdot Z}{m}$

(§. 284.) zu gebrauchen. Heist also Z' die Wassermenge, die statt der in jeder Sec. gegen das Rad hin wirklich ströhmenden Wassermenge Z in hierhergehörigen Formeln zu gebrauchen ist, so hat man

$$45.)\quad Z' = \frac{3\cdot(m-1)\cdot Z}{2m}$$

und es wird also hier der **Eulersche** Koeff. $k = \frac{3\cdot(m-1)}{2m}$;

§. 286.

Bediente man sich der **Eulerschen** unterschlächtigen Räder (K. §. 383.), so hätte man beträchtliche Vortheile. Fürs erste verliehrt man nichts vom Wasser, weil solches sämtlich an die Schaufeln anstöst Fürs andere kann man dabei ohne allen Nachtheil die Schaufeln so groß man will machen z. B. αmal

so

so groß als den natürlichen Querschnitt des anschlagenden Wasserstrahls. Das gäbe

$$Z' = 2Z \cdot \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)$$

Ueber die Hindernisse, welche die Luft der Bewegung der unterschlächtigen Räder entgegensetzt.

§. 287.

Ich halte den Widerstand, den die Luft der Bewegung unterschlächtiger Räder entgegensetzt, nicht für so unbeträchtlich, daß man ihn in allen Fällen aus der Acht lassen könnte. Wenigstens verdient er eine Untersuchung. Die Geschwindigkeit der Schaufeln bei ihrem vortheilhaftesten Gang ist $\frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{gh} = \frac{2\sqrt{gh}}{3}$, so stößt die Luft gegen iede Schaufel gleichfalls mit der Geschwindigkeit $\frac{2\sqrt{gh}}{3}$. Das zu dieser Geschwindigkeit gehörige Gefälle heiße h', so ist

$$h' = \frac{\left(\frac{2\sqrt{gh}}{3}\right)^2}{4g} \text{ (K. §. 152.)} = \frac{4gh}{9 \cdot 4g} = \frac{1}{9}h$$ und wenn ich, um gewiß nicht zu wenig zu rechnen, die Luft $= \frac{1}{800}$ so schwer als das Wasser annehme, so gleicht der Widerstand, den die Luft ieder Schaufel entgegensetzt, dem Gewicht einer Wassersäule, die $= \frac{\frac{1}{9}h \cdot \eta}{800}$ C. F. $= \frac{h\eta}{7200}$ C. F. Ist also die Anzahl aller Schaufeln $= n$, so ist der gesammte Widerstand der Luft gegen alle Schaufeln der W heisen soll $=$ dem Gewicht von $\frac{n \cdot h \cdot \eta}{7200}$ C. F. Wasser. Rechnet man nun noch den Widerstand, den die Speigen und übrigen Theile des Rades von der Luft leiden, hinzu, dessen genaue Berechnung unnöthig wäre, so kann man sicher annehmen

$$46.) \quad W = \frac{n\,h\,\eta}{7000} \text{ C. F.}$$

wo, wenn nichts besonders erinnert wird, sich allemal die Cub. Fuse auf Wasser beziehen, wovon ich 1 C. F. $=$ 68 ℔ setze

Ex. Es sei $n = 30$, $h = 4$ F. $\eta = 4$ Q. Fus so ist der Widerstand der Luft $= \frac{30 \cdot 4 \cdot 4}{7000} = 0{,}069$ C. F. Beträgt nun der Halbmesser des Wellzapfens $\frac{1}{55}$ r, so ist 0,069 C. F. mit $55 \cdot 0{,}069 = 3{,}8$ C. F. am Umfang des Wellzapfens im Gleichgewicht, und da 3,8 C. F. der von $3 \cdot 3{,}8 = 11{,}4$ C. F. $= 775$ ℔ herrührenden Friktion gleich ist, so sieht man wohl, daß hier diese Hindernis allerdings in Betrachtung kommt.

§. 288.

Diese Hindernis nun gehörig mit in Anschlag zu bringen, hat man weiter nichts nöthig, als

$$47.) \quad \varphi + \frac{n h \eta}{7000}$$

statt φ zu gebrauchen.

§. 289.

Aus der Formel no. 35. hat man für iede Secunde, also für $T = 1$,

$$48.) \quad M = \frac{F \alpha}{\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g'}$$

wo sich aber M und F auf eine Menge Cub. Fuse von Wasser beziehen, dessen spec. Schwere einerlei ist. Wenn also F allemal, wie hier vorausgesetzt wird, durch eine gewisse Anzahl C. F. süses Wasser, dessen spec. Schwere ich $= 1$ setzen will, ausgedruckt wird, und M nun auf iede flüßige Masse, deren spec. Schwere γ heisen mag, sich beziehen soll, so hat man

$$49.) \quad M = \frac{F \alpha}{\gamma \cdot \left(\nu \cdot (f + b) + \cdot \lambda g'\right)}$$

Setzt man nun den oben oft erwähnten Eulerschen Koefficienten $= k$, so ist die größte Höhe, auf welche in ieder Sec. die Wassermenge A gebracht werden kann $= k \cdot \frac{4}{27} h$ (K. 363, 362.)

Man setze demnach (§. 72. dieser Erl. no. III. ☿.)

$$T = 1$$

$$\text{und} \quad f = k \cdot \tfrac{4}{27} h$$

so ergiebt sich

$$50.) \quad A = \frac{F \alpha}{k \cdot \frac{4}{27} h}$$

also

also aus no. 49. $F\alpha = M\gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g')$.

und aus no. 50. $= Ak \cdot \frac{4}{27} \cdot h$

wo dann A die Bedeutung wie im Buch (K. 362.) hat; das giebt also

$$A\,k \cdot \tfrac{4}{27} \cdot h = M\,\gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g')$$

folglich

$$51.)\quad A = \frac{27\,M\gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g')}{4k \cdot h}$$

§. 290.

Wenn, wie bisher Z die Wassermenge bedeutet, die iede Sec. erfodert wird, um die Wassermenge M nebst der Friktion zu wältigen, so ist der Druck dieser Wassermenge Z auf die Schaufel $= k \cdot \frac{2}{3} Z \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}$, wie sich ergiebt, wenn man K. §. 360 $\sin\theta = \sin\eta = 1$; h statt v; Z statt A und $k \cdot \frac{2}{3}$ statt des dortigen $\frac{4}{3}$ setzt. Hat also φ die 282 angegebene Bedeutung, so ist

$$k \cdot \tfrac{2}{3} \cdot Z \cdot \sqrt{\frac{h}{g}} - \varphi = k \cdot \tfrac{2}{3} \cdot A \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}$$

also

$$Z = A + \frac{\varphi}{k \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}}$$

oder $$52.)\quad Z = A + \frac{9\varphi}{2k} \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}$$

und nun aus no. 51. den Werth von A gebraucht, giebt

$$53.)\quad Z = \frac{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda g')}{4 \cdot k \cdot h} \cdot M + \frac{9\varphi}{2k} \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}$$

und wegen des Widerstands der Luft aus der Formel no. 47.

$$54.)\quad Z = \frac{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda g')}{4k \cdot h} \cdot M + \left(\varphi + \frac{n\,h\,\eta}{7000}\right) \times \frac{9}{2k} \sqrt{\left(\frac{g}{h}\right)}.$$

§. 291.

§. 291.

Um dieſe Formel auf das Pumpwerk völlig anwendbar zu machen, muß man den Werth von φ hier ſubſtituiren. Hierzu dient die Formel no. 43. nur mit folgender kleinen Aenderung. Man muß nämlich die von den Pumpenkolben und dem zugehörigen Geſtänge herrührende Friktion, noch mit hineinbringen. Iſt nun die Kraft, die am Umfange des Rades angebracht, der Friktion das Gleichgewicht hält, dem Gewicht von ψ C. F. Waſſer gleich, ſo widerſteht dieſe Friktion der Bewegung des Wellzapfens ebenſo, wie die durch ein Gewicht $= 3 \cdot \frac{r}{\varrho} \psi$, das auf die Wellzapfen druckt, verurſachte Friktion, und man darf alſo nur $p + \frac{3r\psi}{\varrho}$ ſtatt p ſetzen, ſo hat man aus der 43ten Formel vollſtändig

55.) $$\varphi = \frac{\left(p + \frac{3r\psi}{\varrho} + \frac{2k}{9} \cdot Z \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{g}\right)}\right) \cdot \varrho}{3r}$$

$$= \frac{p\varrho}{3r} + \psi + \frac{\varrho}{3r} \cdot \frac{2k}{9} \cdot Z \cdot \sqrt{\frac{h}{g}}$$

dieſes ſtatt φ in der 54ten Formel gebraucht, verwandelt das letztere Glied $\left(\varphi + \frac{nh\eta}{7000}\right) \cdot \frac{9}{2k} \sqrt{\frac{g}{h}}$ in folgendes

$$\left(\frac{p\varrho}{kr} + \psi\right) \cdot \frac{9}{2k} \cdot \sqrt{\frac{g}{h}} + \frac{\varrho}{3r} \cdot Z + \frac{nh\eta}{7000} \cdot \frac{9}{2k} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

oder

$$\left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{kr} + \frac{4{,}5}{k} \cdot \psi\right) \sqrt{\frac{g}{h}} + \frac{\varrho}{3r} \cdot Z + \frac{9nh\eta}{14000 \cdot k} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

Man erhält alſo in der 54ten Formel

$$Z = \frac{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g')}{4k \cdot h} \cdot M + \frac{\varphi}{3r} \cdot Z$$

$$+ \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{kr} + \frac{4{,}5}{k} \cdot \psi + \frac{9nh\eta}{14000 \cdot k}\right) \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}$$

und

$$\text{und } \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right) \cdot Z = \frac{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f+b) + \lambda \cdot g')}{4k \cdot h} : M$$

$$+ \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{kr} + \frac{4{,}5}{k} \cdot \psi + \frac{9nh\eta}{14000 \cdot k}\right) \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}$$

$$\text{Mithin } Z = \left(\frac{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f+b) + \lambda \cdot g')}{4kh} \cdot M\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{kr} + \frac{4{,}5}{k} \cdot \psi + \frac{9nh\eta}{14000 \cdot k}\right) \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}\right) : \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right)$$

Gewöhnlich wird nun hier $k = 1$ gesetzt. Nimmt man aber der 45ten Formel gemäß $k = \frac{3 \cdot (m-1)}{2m}$, und nimmt ausserdem auf den Umstand (§. 277. dieser Erl.) nach der 42ten Formel Rücksicht, so erhält man vollständig

$$56.) \quad Z = \frac{2m \cdot (q + 1\frac{1}{3}\varrho)}{3 \cdot (m-1) \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right)} \times$$

$$\left(\frac{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f+b) + \lambda \cdot g')}{4h} \cdot M + \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{r} + 4{,}5 \cdot \psi + \frac{9nh\eta}{14000}\right) \sqrt{\frac{g}{h}}\right)$$

und daraus auch

$$57.) \quad M = \left(\frac{3 \cdot (m-1) \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right)}{2 \cdot m \cdot (q + \frac{1}{3}\varrho)} \cdot Z\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{r} + 4{,}5 \cdot \psi + \frac{9nh\eta}{14000}\right) \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}\right) \cdot \frac{4h}{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f+b) + \lambda \cdot g')}$$

Beim Gebrauch der 56ten Formel, nimmt man η und m zuerst muthmaslich an, und bestimmt daraus Z, sucht alsdann aus diesem Z den Werth von η, und m vom neuen, vermittelst der 44ten Formel, und berichtigt dann den Werth von Z. (s. §. 337. d. Erl. no. XVII.)

Beim Gebrauch der 57ten Formel, muß man die Anzahl der zu betreibenden Pumpen muthmaslich annehmen, und ψ daraus vorläufig bestimmen; das hiernach berechnete M, wird alsdann die wahre Pumpenzahl nebst der Länge des zugehörigen Gestänges, näher bestimmen, daraus man den Werth von ψ aufs neue gehörig berechnet, und dann den von M berichtigt.

§. 292.

Legte man das Rad horizontal, daß also seine Axe vertikal stünde (K. §. 388.), so hätte man nach (§. 286. dieser Erl.)

1.) $k = 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)$

2.) Die Veränderung des Moments wegen der Dicke des Wellzapfens fiele weg.

3.) die Friktion befändte sich nun nicht am Umfang des Wellzapfens, sondern auf der ganzen Grundfläche, mit der er aufsitzt, ausgebreitet, so daß die Stelle, wo man die ganze Friktion als vereinigt anzusehen hätte, vom Mittelpunkt dieser Fläche, um $\frac{2}{3}\varrho$ entfernt wäre, und man müßte also $\frac{2}{3}\varrho$ statt ϱ gebrauchen.

Hiernach liesen sich die beiden Formeln no. 56 und 57. leicht abändern, und es fällt in die Augen, daß diese Art Räder das kleinste Z d. i. das wenigste Aufschlagwasser erfodern, und daher wirklich unter den unterschlächtigen die vortheilhaftesten sind.

II. Von den oberschlächtigen Rädern.

§. 293.

Wenn u die der Geschwindigkeit des Rades, im Theilriß gerechnet, zugehörige Höhe, und r der Halbmesser des Theilrisses ist, so hat man, die Anzahl der Umdrehungen in einer Minute $= \mu$ gesetzt,

58.) $\mu = \frac{60 \cdot 2\sqrt{gu}}{2\pi r} = \frac{75{,}216 : \sqrt{u}}{r}$

§. 294.

Weil auch hier $\mu = \frac{20}{b}$ (Form. no. 40.) so hat man

75,

$$\frac{75,216 \cdot \sqrt{u}}{r} = \frac{20}{b}$$

$$\text{also} \quad u = \frac{400}{75,216^2} \cdot \frac{r^2}{b^2}$$

$$\text{oder} \quad 59.) \quad u = 0,0707 \cdot \frac{r^2}{b^2}$$

§. 295.

Aus der oben vorgetragenen Lehre weis man schon, daß es für den Effekt des Rades vortheilhaft ist, u klein zu nehmen. Aber wegen der schädlichen Folgen, die ein zu langsamer Gang des Rades aus Ursachen, die ich (§. 271. d. Erl.) bemerkt habe, nach sich zieht, darf man doch wohl nicht u unter einen Fus groß nehmen. Die Voraussetzung $u = 1$, gäbe in der Formel no. 59. $\frac{b}{r} = \sqrt{0,0707} = 0,26 \cdot \cdot$ Man könnte daher, um geschmeidigere Ausdrücke zu erhalten, u so groß nehmen, daß gerad $\frac{b}{r} = \frac{1}{4}$ würde. Aus diesen Gründen nehme ich folgende Regel an:

VI. **Man nehme den Kolbenhub den vierten Theil so groß als den Halbmesser des Rades.**

§. 296.

Aus der Regel (VI.) folgt nun nach no. 59.

$$u = 0,0707 \cdot (\tfrac{1}{4})^2 \text{ Rhl. Fus.}$$

$$\text{oder} \quad 60.) \quad u = 1 \text{ F. } 1\tfrac{1}{2} \text{ Zoll}$$

und zugleich nach der (Form. no. 40.)

$$61.) \quad \mu = \frac{20}{4r} = \frac{80}{r}.$$

So geht z. B. ein 32schuhiges Rad, dessen Theilriß nämlich im Durchmesser 32 Fus hat, $\frac{80}{16} = 5$ mal in einer Minute herum, und so ein 20schuhiges $\frac{80}{10} = 8$mal.

§. 297.

Weil sowohl wegen des gröſsern Momentes der Friktion, als wegen des Umstandes (277. d. Erl) der Effekt eines Rades desto mehr vermindert, und der Gang desto ungleichförmiger wird, ie gröſser $\frac{q + \frac{1}{3}\varrho}{q}$ (Form. no. 42.) wird, so hat man in der Ausübung dahin zu sehen, daß $\frac{1}{3}\varrho$ allemal nur ein kleiner Theil von q werde.

§. 298.

Geht das Rad in t Sec. einmal herum, so ist die sämmtliche iedesmal in seinen Schaufeln befindliche Wassermenge $= \frac{1}{2}tZ$, wenigstens für die Berechnung der Friktion, weil man für solche wohl annehmen darf, daß sämmtliche Schaufeln auf der einen Hälfte des Rades auf gleiche Art gefüllt sind.

§. 299.

Nach der bisherigen Voraussetzung, daß u die ganze Höhe, von der das Wasser in die Schaufel fällt, bedeutet, und die Geschwindigkeit der Schaufeln $= 2\sqrt{gu}$ sein soll, ist das Gewicht, welches der Last das Gleichgewicht hält, das in den Schaufeln befindliche Wasser, und so hängt die Geschwindigkeit des Rades, nur von der Geschwindigkeit des einfallenden Wassers und gar nicht von der Menge desselben ab. Umgekehrt hängt die Bestimmung der Last gar nicht von der Geschwindigkeit des Aufschlagwassers sondern von der Menge desselben ab.

§. 300.

Wenn also die Buchstaben ihre vorige Bedeutung behalten, so kann man

$$62.) \quad \varphi = \frac{(p + \frac{1}{2}tZ) \cdot \varrho}{3r}.$$

setzen.

§. 301.

Wäre die Geschwindigkeit des Rades $< 2\sqrt{gu}$, so wäre die Kraft, welche der Last das Gleichgewicht hielte, nicht blos das in den Schaufeln liegende Wasser, sondern überdas noch eine Kraft, welche durch den Stos des Wassers hervorgebracht würde, und sie wäre also in solchem Fall $> \frac{1}{2}tZ = (\frac{1}{2}t + y) \cdot Z$, wo man erst y näher bestimmen müßte. Da aber die Gröſse $\frac{(p + \frac{1}{2}tZ) \cdot \varrho}{3r}$ von der, $\frac{(p + \frac{1}{2}tZ) \cdot \varrho}{3r} + \frac{y \cdot Z \cdot \varrho}{3r}$ nur um

den

den Theil $\frac{\gamma \cdot Z \cdot \varrho}{3r}$, der wegen des kleinen Quotienten $\frac{\varrho}{3r}$ für die Ausübung allemal unbeträchtlich ist, verschieden ist; so läßt sich der Werth von Φ, wie ihn die 62te Formel giebt, ohne merklichen Fehler allgemein beibehalten, wenn gleich die Geschwindigkeit der Schaufeln $< 2\sqrt{gu}$ ist.

§. 302.

Soll Φ zugleich mit auf die an den Pumpenkolben und dem Gestänge sich äussernde Friktion gehen, so hat man hier wie (§. 291. d. Erl.) vollständig

$$63.) \quad \Phi = \frac{\left(p + \frac{3r\psi}{\varrho} + \frac{1}{2} t Z\right) \cdot \varrho}{3r}$$

$$= \frac{P\varrho}{3r} + \psi + \frac{t\varrho}{6r} \cdot Z.$$

Weiter fällt bei den oberschlächtigen Rädern keine Hindernis vor, denn der Widerstand der Luft, ist bei solchen, wegen der Gestalt der Schaufeln, völlig unbeträchtlich, und da ohnehin auch einerlei Wiederstand bei oberschlächtigen Rädern von weit weniger Wasser überwunden wird, als bei unterschlächtigen, so kommt der von der Luft, hier gar nicht in Rechnung.

§. 303.

Wenn n die zuvor erwähnte Bedeutung hat, und s den Abstand der tiefsten Stelle des Theilrisses von der Stelle desselben bedeutet, bis wohin man alle Schaufeln als einerlei gefüllt gleich drunter aber als völlig ausgeleert, ansehen kann; so ist die Wirkung des Rads $= A \cdot (a - u - s)$ (K. 400. V.) also für das oberschlächtige Rad die Grösse $a - u - s$ das, was für das unterschlächtige (Form. no. 50.) $k \cdot \frac{A}{17} \cdot h$ ist; setzt man also hier gleichfalls h statt a, so hat man wie in der 50ten Formel

$$64. \quad A = \frac{F\alpha}{h - u - s}$$

Die Formel no. 49. gilt allgemein, sowohl für ober- als für unterschlächtige Räder, also hat man $F\alpha$

aus der 49ten Formel $= \gamma \cdot (\gamma \cdot (f + b) + \lambda \cdot g') M$

" " 64ten " $= A \cdot (h - u - s)$

demnach

$$A \cdot (h - u - s) = \gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g') \cdot M$$

und

$$65.) \quad A = \frac{\gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g') \cdot M}{h - u - s}$$

wo A wieder die Wassermenge bedeutet, die blos zur Aufförderung der Wassermenge M, ohne irgend eine andere Hindernis in Betrachtung zu ziehen, erfodert wird. Die Wassermenge, die auf das Rad zur Aufförderung der Wassermenge M erfodert wird, so daß die sonstigen Hindernisse zugleich mit überwunden werden, soll wie vorhin Z heisen.

§. 304.

Das statische Moment der Kraft ist hier

$= c^2 \cdot (h - u - s) \cdot r$ (K. §. 392.). Nun ist

$$c^2 = \frac{Z}{2\sqrt{gu}}$$

also das genannte statische Moment $= \frac{(h - u - s) \cdot r \cdot Z}{2\sqrt{gu}}$.

Nun ist das statische Moment von $\varphi = r \cdot \varphi$, also

$$\frac{(h - u - s) \cdot r}{2\sqrt{gu}} \cdot Z - r \cdot \varphi = \frac{(h - u - s) \cdot r}{2\sqrt{gu}} \cdot A$$

und nun

$$66.) \quad Z = A + \frac{2\varphi \cdot \sqrt{gu}}{h - u - s}$$

Hier substituire man aus der 63ten Formel den Werth von φ, und aus der 65ten den von A, so hat man, wenn ich ζ statt $h - u - s$ schreibe,

$$Z = \frac{\gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g') \cdot M}{\zeta}$$

$$+ \left(\frac{p\varrho}{3r} + \psi\right) \cdot \frac{2\sqrt{gu}}{\zeta} + \frac{t\varrho}{3r} \cdot \left(\frac{\sqrt{gu}}{\zeta}\right) \cdot Z$$

also

$$Z = \frac{\gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g') \cdot M + \left(\frac{p\varrho}{3r} + \psi\right) \cdot 2\sqrt{gu}}{\zeta - \frac{t\varrho}{3r} \cdot \sqrt{gu}}$$

und wegen (§. 277. d. Erl.)

$$67.)\ Z = \frac{(q + \frac{1}{3}\varrho) \cdot \left(\gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g') \cdot M + \left(\frac{p\varrho}{3r} + \psi\right) \cdot 2\sqrt{gu}\right)}{q \cdot \left(\zeta - \frac{t\varrho}{3r} \cdot \sqrt{gu}\right.}$$

und

$$68.)\ M = \frac{\frac{q \cdot}{q + \frac{1}{3}\varrho} \cdot \left(\zeta - \frac{t\varrho}{3r} \cdot \sqrt{gu}\right) \cdot Z - \left(\frac{p\varrho}{3r} + \psi\right) \cdot 2\sqrt{gu}}{\gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g')}$$

Nähere Einrichtung dieser Formeln für die Ausübung.

§. 305.

Die gefundenen Formeln setzen voraus, daß sich die Schaufeln mit der Geschw. welche der Höhe u, als dem Gefälle des Wassers bis in die Schaufel, zugehört, bewegen. Und weil eine zu große Geschwindigkeit der Schaufeln, nicht nur aus denen schon mehr erwähnten, auch bei den unterschlächtigen Rädern, statt findenden Ursachen, sondern hier noch aus der besondern Ursache schädlich ist, weil dadurch das Wasser wegen der Schwungkraft, zu frühe aus den Schaufeln geworfen wird, so habe ich vorhin allgemein $u = 13\frac{1}{2}$ Zoll angenommen, d. h

Man soll dem Rad eine Last anhängen, bei der sich seine Schaufeln mit einer Geschwindigkeit, die der Höhe $13\frac{1}{2}$ Zoll zugehört, herumdrehen.

Aber u läßt sich in der Ausübung nicht allemal so klein nehmen; es wird sich in den meisten Fällen, nicht unter etlichen Fusen nehmen lassen, und doch läßt sich die gegebene Regel, nicht wohl überschreiten, und man hat also alsdann die Geschwindigkeit der Schaufeln $< 2\sqrt{gu}$. d. h. die Voraussetzung,

auf

auf welche sich die Formeln no. 67. u. 68. gründen, findet alsdann nicht statt, und es ist daher eine allgemeinere Einrichtung dieser Formeln nöthig, die auf alle Fälle paßt.

§. 306.

Man setze δ statt u, so daß die Geschwindigkeit der Schaufeln nun der Höhe δ zugehört, also $= 2\sqrt{g\delta}$ ist. Ist nun das wirkliche Gefälle bis in die Schaufel wie bisher $= u$; gedenkt man sich ferner die gesammte Last am Umfang des Wellzapfens, und das Rad dreht sich nun mit der Geschwindigkeit, welche der Höhe δ zugehört, so würde ein Theil der Last, der $= k \cdot A \cdot \left(\sqrt{\frac{\delta}{u}}\right) \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta}) \frac{r}{\varrho}$, wo k den Eulerschen Koeff. bedeutet, nach (K. 355. IX.) schon durch den bloßen Stos des Wassers vernichtet, wenn die Richtung des Stoßes auf den Halbmesser des Rades senkrecht wäre. *) Da aber fürs erste diese Richtung schief ist, und fürs andere die ganze Fläche, welche vom Strahl getroffen wird, wegen der Gestalt der Schaufeln, nicht in einer Ebene liegt, auch die Fläche selbst nicht hinlänglich groß ist, so kann man hier k nicht wohl $> \frac{1}{2}$ annehmen, und das gäbe den Theil, der durch den Stos des Wassers vernichtet wird $=$

$$\tfrac{1}{2} A \left(\sqrt{\frac{\delta}{u}}\right) \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta}) \cdot \frac{r}{\varrho}$$

(s. K. §. 400. Erl.); der Allgemeinheit wegen will ich indessen doch k statt $\frac{1}{2}$ gebrauchen. Dieser Theil der Last ist nun der Friktion am Wellzapfen gleich, welche vom Gewicht

$$3k \cdot A \cdot \frac{r}{\varrho} \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta}) \cdot \sqrt{\frac{\delta}{u}}$$

entsteht, und da dieser Theil von der gesammten Last abgezogen werden muß, so setze man nur

$$p - 3k \cdot A \cdot \frac{r}{\varrho} \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta}) \cdot \sqrt{\frac{\delta}{u}}$$

statt p in die vorigen Formeln; nun hat man aus der 65ten Form.

A =

*) Eigentlich sollte ich hier Z statt A gebrauchen, weil aber beider Gebrauch hier ziemlich gleichgültig ist, so habe ich lieber A gebrauchen wollen, um die Formeln nicht ohne Noth verwickelt zu machen, welches geschehen würde, wenn ich Z statt A gesetzt hätte.

$$A = \frac{\gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g') \cdot M}{\zeta}$$

also die ſtatt p zu ſetzende Gröſſe =

$$p - 3k \cdot \frac{r \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g') \cdot M}{\varrho\zeta} \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta})\sqrt{\frac{\delta}{u}}$$

Nun ſei

69.) $(\gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g') = \alpha$

und 70.) $\zeta - \frac{t\varrho}{3r} \cdot \sqrt{gu} = \beta$

ſo verwandelt ſich die 67te Formel in

$$Z = \frac{(q + \frac{1}{3}\varrho) \cdot (\alpha \cdot M + \left(\frac{p\varrho}{3r} + \psi\right) \cdot 2\sqrt{gu})}{q \cdot \beta}$$

und wenn man nun

$$p - 3k \cdot \frac{r \cdot \alpha \cdot M}{\varrho\zeta} \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta})\sqrt{\frac{\delta}{u}}$$

ſtatt p, in dieſe Formel ſetzt, ſo erhält man

$$Z = \frac{q + \frac{1}{3}\varrho}{q\beta} \cdot [\alpha M +$$

$$\left(\frac{\varrho}{3r}(p - 3k \cdot \frac{r\alpha M}{\varrho\zeta} \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta})\sqrt{\frac{\delta}{u}}) + \psi\right) 2\sqrt{gu}]$$

oder 71.) $Z = \frac{q + \frac{1}{3}\varrho}{q\beta} \cdot [\alpha M +$

$$+ \left(\frac{p\varrho}{3r} - \frac{k\alpha M}{\zeta} \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta})\sqrt{\frac{\delta}{u}} + \psi\right) 2\sqrt{gu}]$$

Hieraus folgt nun weiter

$$\frac{q\beta}{q + \frac{1}{3}\varrho} \cdot Z = \left(\alpha - \frac{k\alpha}{\zeta} \cdot 2\sqrt{g\delta} \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta})\right)$$

$$\times M + \left(\frac{p\varrho}{3r} + \psi\right) \cdot 2\sqrt{gu}$$

also $\frac{q\beta}{q+\frac{1}{3}\varrho} \cdot Z - 2 \cdot \left(\frac{p\varrho}{3r} + \psi\right) \cdot \sqrt{gu} =$

$M \cdot \left(\frac{\alpha\zeta - \alpha k \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta}) \cdot 2 \cdot \sqrt{g\delta}}{\zeta}\right.$ und

daher

$$72.) \quad M = \frac{\frac{\zeta}{\alpha} \cdot \left[\frac{q\beta}{q+\frac{1}{3}\varrho} \cdot Z - 2\left(\frac{p\varrho}{3r} + \psi\right) \cdot \sqrt{gu}\right]}{\zeta - k \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta}) \cdot 2\sqrt{g\delta}}$$

Die beiden Formeln no. 71 und 72. sind nun so allgemein, daß sich daraus die beiden vorigen (no. 67 und 68.) von selbst ergeben, wenn man $\delta = u$ setzt.

Daß nun $\delta < u$ dem Rad eine gröſſere Gewalt als $\delta = u$ giebt, ist in Erl. zu K. §. 402. VIIII. gewiesen worden. Aber der schon mehr erwähnte Umstand, daß bei einem langsamern Gang des Rades, die Anzahl der Pumpen oder ihre Weite vergröſſert werden muß, welches zugleich der Werth von ψ vergröſſert, verstattet nicht, δ mit Vortheil in der Ausübung sehr klein zu nehmen, da wirklich durch einen groſſen Werth von ψ der Werth von M ungemein vermindert werden kann. Es geht daher nicht einmal an, hier nach der Methode des Gröſten und Kleinsten den Werth von δ zu bestimmen, für welchen M in der 72ten Formel ein Gröſtes wird. Weil nun u doch so klein als möglich genommen werden muß, doch aber auch nicht allemal, wie es der Vortheil des Rades erfodert, klein genug in der Ausübung genommen werden kann, so würde ich dem 295 und 296ten §. d. Er. gemäß rathen:

VIII. Man solle $\delta = 13\frac{1}{2}$ Zoll, und u so wenig als sichs thun läßt über $13\frac{1}{2}$ Z. nehmen.

Untersuchung der Frage: ob die Schwungkraft des Rades die Friktion am Wellzapfen für die Ausübung beträchtlich ändere?

§. 307.

Indem sich (hier fig. 38.) das auf der einen Hälfte mit Wasser beschwerte Rad um seine Axe bei C dreht, bekommen bekanntlich alle Theile des Rades eine gewisse Schwungkraft, mit der sie sich von A zu entfernen suchen. Wäre das Rad so beschaffen, daß es von iedem Durchmesser in zwo völlig gleiche und ähn-

ähnliche Hälften getheilt würde, auch dem Gewicht nach, so würde der Wellzapfen von der Schwungkraft gar keinen Druck leiden; es würden sich nämlich allemal die Schwungkräfte an zwo einander gegenüber liegenden Stellen einander völlig aufheben; da aber des Rades eine Hälfte mit Wasser beladen und daher beträchtlich schwerer als die andere ist, so ist auch die Schwungkraft der beladenen Hälfte gröſſer als der leeren, und die Axe C muß also nach der beladenen Hälfte zu, stärker gezogen werden als nach der leeren.

§. 308.

Wenn Wq durch die Mitte von aV senkrecht gezogen wird, so ist in dieser Horizontallinie die Richtung der Schwungkraft von ieder Hälfte des Rades.

§. 309.

Den Umstand, daß die eine Hälfte des Rades durch Wasser beschwert ist, beiseit gesetzt, setzt man beide Hälften einander gleich und ähnlich, so daß ihr Schwerpunkt in den Mittelpunkt der Axe fällt. Nimmt man, wie für die Absicht der ietzigen Untersuchung gar wohl verstattet ist, die beiden Voraussetzungen an: 1. daß alle Schaufeln auf der einen Hälfte des Rades, auf gleiche Art mit Wasser angefüllt sind 2. daß der Mittelpunkt der Schwere des in ieder Schaufel befindlichen Wassers, sich in der Mitte, zwischen dem innern und äusern Umfang der Kränze befinde, da dann r die gerade Linie vom Mittelpunkt des Rades bis an diese Stelle wäre, so darf man nur den Schwerpunkt k des zum Halbmesser r gehörigen Halbkreises suchen, und wenn nun C der Mittelpunkt des Rades, p sein Gewicht, β das Gewicht des sämmtlichen in den Schaufeln liegenden Wassers und ν der Mittelpunkt der Schwere des ganzen auf der einen Seite mit Wasser beschwerten Rades ist, so hat man

$$k\nu = \frac{Ck \cdot p}{p + \beta}$$

$$\text{Nun ist } Ck = \frac{2r}{\pi}$$

$$\text{also} \qquad k\nu = \frac{2r \cdot p}{(p+\beta) \cdot \pi}$$

$$\text{und} \qquad C_\nu = Ck - k_\nu = \frac{2r - \frac{2rp}{p+\beta}}{\pi}$$

$$= \frac{2r}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{p}{p+\beta}\right).$$

(s. H. H. Karst. Stat. §. 74.)

§. 310.

Die Länge der Schaufeln oder Entfernung beider Kränze von einander heiſe δ. so iſt die in den ſämmtlichen Schaufeln liegende Waſſermenge $= \frac{1}{2} tZ$ und läßt ſich als ein Waſſerring anſehen, deſſen Querſchnitt die Höhe $h' = \frac{\frac{1}{2} tZ}{\pi r \delta}$ hat.

Gedenkt man ſich nun ſtatt dieſes Rings, einen halben Waſſercylinder, der bVWb zur Grundfläche und δ zur Höhe hätte, und deſſen Schwerpunkt in n wäre, ſo wäre (H. H. Karſten a. a. O. §. 81.)

$$Cn = 0{,}424 \cdot (r + \tfrac{1}{2} h')$$

und die Schwungkraft dieſer halben cylindriſchen Scheibe $=$

$$\frac{\lambda\lambda}{2g} \cdot Cn \cdot M'$$

(H. H. Karſten Mechan. §. 148.) wo λ die Winkelgeſchwindigkeit der halben Scheibe oder des Waſſerrades, und M' das Gewicht der halben Waſſerſcheibe bedeutet. Der Werth von Cn ſubſtituirt giebt alſo

$$\text{die Schwungkraft der halben Scheibe} = \frac{\lambda\lambda}{2g} \cdot 0{,}424 \cdot (r + \tfrac{1}{2} h') \cdot M'$$

Ebenſo wäre die Schwungkraft der nur bis an den innern Umfang gsi reichenden ähnlichen Waſſerſcheibe gisg

$$= \frac{\lambda\lambda}{2g} \cdot 0{,}424 \cdot (r - \tfrac{1}{2} h') \cdot M''$$

wo M'' das Gewicht dieſer Waſſerſcheibe bedeutet. Das giebt nun die Schwungkraft des vorerwehnten Waſſerrings

$$= \frac{\lambda\lambda}{2g} \cdot 0{,}424 \cdot \left((r + \tfrac{1}{2} h') \cdot M' - (r - \tfrac{1}{2} h') \cdot M''\right)$$

§. 311.

§. 311.

Es ist aber

$$M' = \frac{\pi \cdot (r + \frac{1}{2}h')^2}{2} \cdot \delta\zeta$$

und $$M'' = \frac{\pi \cdot (r - \frac{1}{2}h')^2}{2} \cdot \delta\zeta$$

wo ζ das Gewicht von 1 Cub. F. Wasser bedeutet, und daher alles in Fusen ausgedruckt werden muß. Heist also die Schwungkraft des Wasserrings η, so hat man

$$73.) \quad \eta = \frac{\lambda^2}{2g} \cdot 0{,}424 \left(\frac{(r+\frac{1}{2}h')^3 \cdot \pi\delta\zeta}{2} - \frac{(r-\frac{1}{2}h')^3 \cdot \pi\delta\zeta}{2} \right)$$

$$= \frac{0{,}106 \cdot \pi\delta\zeta\lambda^2}{g} \cdot \left((r+\tfrac{1}{2}h')^3 - (r-\tfrac{1}{2}h')^3 \right)$$

welches also auch der Ausdruck für den Theil ist, um welchen die Schwungkraft der mit Wasser beladenen Hälfte des Rades, die, der leeren Hälfte übertrift.

§. 312.

Ex. Ein oberschlächtiges Rad, für das $r = 15$ F. $\delta = 4$ F. und $Z = 18$ C. F. ist, gehe in 10 Sec. einmal herum; man sucht die überwiegende Schwungkraft des Rades nach CW.

Aufl. Hier ist $\lambda = 36° = \frac{\pi}{10} = 0{,}314$, also $\frac{\lambda^2}{g} = 0{,}0063$,

und $\frac{0{,}106 \cdot \pi\delta\zeta\lambda^2}{g} = 0{,}5694$ ℔. $h' = \frac{5 \cdot 18}{3{,}141 \cdot 15 \cdot 4} = 0{,}4771$;
$(r + \frac{1}{2}h')^3 = 3538$; $(r - \frac{1}{2}h')^3 = 3215$; $(r+\frac{1}{2}h')^3 - (r-\frac{1}{2}h')^3 = 323$, und nun

$$\eta = 0{,}5694 \cdot 323 = 184 \text{ ℔}.$$

Sie beträgt also im gegenwärtigen Fall, gewiß noch nicht $\frac{1}{10}$ von dem übrigen Druck, wodurch die Friktion am Wellzapfen verursacht wird, und in den allermeisten Fällen muß sie noch bei weiten weniger als $\frac{1}{10}$ des übrigen Drucks betragen. Da nun der wegen der Friktion am Wellzapfen nöthige Theil von Z, ohnehin bei oberschlächtigen Rädern ziemlich geringe ist, so fällt in die Augen, daß der wegen der Schwungkraft weiter erforderliche Theil des Aufschlagwassers, für die Ausübung völlig unbeträchtlich, und für nichts zu achten ist.

III. Von den Tritträdern.

§. 313.

Ich rede hier nur von den gewöhnlichen vertikalen, auf deren innerm Umfang oder Boden, Menschen oder Thiere aufwärts gehen und so das Rad durch ihr bloses Gewicht zur Umdrehung um seine Axe nöthigen.

§. 314.

Es ist der Erfahrung gemäß die beste Voraussetzung diese, daß ein Mensch mit seinen Füsen sich beständig in der Stelle innerhalb des Rades erhält, welche von der durch die Axe des Wellbaums gehenden Vertikallinie, um die Hälfte des Halbmessers $= \frac{1}{2}r$ absteht. Weil nun bei einem Maulthier oder Pferd *) der Schwerpunkt etwa in die Mitte zwischen den Hinter- und Vorderfüsen fällt, so wird man auch für diese beide Gattungen von Thieren, allemal die Regel festsetzen können, daß man sie im Rad etwa mit der Mitte zwischen ihren Hinter- und Vorderfüsen, bis an diejenige Stelle müsse treten lassen, welche um den halben Halbmesser des Trittrads d. i. um $\frac{1}{2}r$ von der durch des Wellbaums Axe gehenden Vertikallinie entfernt ist. Es kommt bei Bestimmung dieser Stelle darauf an, daß man sie nicht so hoch nehme, daß man aufhören muß, dem Thier in einer solchen schiefen Lage eine oder zwo Stunden lang, diejenige Geschwindigkeit zuzumuthen, die man sonsten vielleicht bei einer etwas geringern Anstrengung seiner Kräfte, von ihm erwarten könnte. Auf die Beschwerlichkeit im Treten, die freilich desto gröſſer wird; ie höher man das Thier im Rad hinauftreibt, kommt es übrigens offenbar so genau hier nicht an, wenn es nur nicht soweit hinauf getrieben wird, daß es seinen festen Stand verliehrt oder ausglitschen könnte, wogegen es doch durch die am Boden des Rades aufgenagelte Querleisten ziemlich gesichert ist. Alle eine oder zwo Stunden wird ohnehin das tretende Thier wieder von einem andern abgelöst, und bekommt Zeit zu seiner Erholung, wenn ihm auch die Arbeit etwas beschwerlicher geworden wäre. Wenn man also auch völlig genau wüßte, in was für einem Verhältnis die Beschwerlichkeit des Tretens mit dem Winkel, den die schiefe Lage des Thiers mit dem Horizont macht, stehe, so sehe ich doch nicht, wie Rechnungen darauf zu gründen wären, um für die Ausübung brauchbare Resultate zu finden. Und da man diese Verhältnis noch gar nicht kennt, und nur

*) Ich werde hier nur die Rechnung für diese beiden Arten von Thieren anstellen, weil man sich ihrer auf Salzwerken gewöhnlich bedient, und sie zu diesem Gebrauch vor unsern sonstigen Thieren wirklich den Vorzug haben s. unten (§. 327.)

Digitized by Google

nur so nach Gutdünken auf geradewohl annehmen kann, so sind hier offenbar alle, zu Bestimmung der vortheilhaftesten Stelle des Thiers im Trittrad, anzustellende blos theoretische Untersuchungen, für die Ausübung unnütz. Nimmt man den erwähnten Satz zu Bestimmung dieser Stelle an, so zeigt die Trigonometrie, daß die schiefe Lage des Thiers mit dem Horizont einen Winkel von 30° macht, der, weil des Rades Boden, worauf das Thier tritt, überall mit Leisten beschlagen ist, und das Thier oft genug abgelöst wird, nicht zu groß ist. Auch halten Hr. Hofr. Karsten Lehrbegrif d. ges. Mathematik VI. Th. S. 791. no. IV. und H. Dan. Bernoulli hydrod. Sect. IX. p. 166. eben diesen Winkel für den vortheilhaftesten. Aus eigenen Beobachtungen muß ich freilich urtheilen, daß nach dieser Voraussetzung den Thieren der Gang im Rad etwas beschwerlich wird, und das bloße Gehen an der angenommenen Stelle ihnen wirklich zu einer harten Arbeit wird, härter als sie ihnen von den meisten Fuhrleuten zugemuthet werden; wenn ich indessen voraussetze, daß sie alle eine oder zwo Stunden längstens abgelöst werden, und daß sie überdas ihre Nachtruhe von wenigstens 6 Stunden behalten und gut gefüttert werden, so bleibt die Arbeit für sie nicht zu hart, und man kann sie unter diesen Bedienungen gar wohl mit ihrem Schwerpunkt bis an die genannte Stelle des Rades, die nämlich um die Entfernung $\frac{1}{2}$ r von der durch die Axe gehenden Vertikallinie absteht, treten lassen. Um indessen die Formeln hier in ihrer völligen Allgemeinheit abzufassen, will ich statt $\frac{1}{2}$ r überhaupt βr gebrauchen.

§. 315.

Zur Erleiterung der hier vorfallenden Rechnungen, stelle man sich vor, es werde statt des wirklichen Gewichts der Pferde oder Maulthiere oder statt der Wassermenge P, die eben das Gewicht hat, eine andere $= \beta P$, wo βP in Cub. Fusen ausgedruckt wird, am Umfang des Rades nach der Richtung einer Tangente angebracht. Das Moment der Kraft wird nämlich dadurch nicht geändert.

§. 316.

Nach (§. 60. d. Erl.) ist die größte Geschwindigkeit eines Menschen $=$ 6 Fus, und eines Pferdes $=$ 12 Fus, ich werde daher für ein Maulthier das arithmetische Mittel nehmen und seine größte Geschwindigkeit $= 9$ Fus setzen. Der Ausdruck $10{,}5 \pm 1{,}5$ F. druckt demnach die größte Geschwindigkeit für beide Gattungen von Thieren, nämlich mit dem obern Zeichen für Pferde, mit dem untern für Maulthiere aus.

§. 317.

§. 317.

Ein unterschlächtiges Wasserrad vom Halbmesser r, dem übrigens die durch das Gerinne und die Schaufeln entstehende Hindernisse, nicht im Weg sind, wird bei seinem vortheilhaftesten Gang völlig mit der Kraft und Geschwindigkeit, wie das zuvor erwähnte Trittrad gedreht, daferne 1. das Aufschlagwasser mit einer Geschwindigkeit von $10,5 \pm 1,5$ F. in einer Sec. an die Schaufeln anschlägt, 2. der Stos der anstosenden Wassersäule so groß als das Gewicht von βP ist. Die größte Geschwindigkeit, die nämlich solchergestalt das Wasser dem Rad mittheilen könnte, wäre $= 10,5 \pm 1,5$ F. und das statische Moment der größten Last, welche es wältigen könnte, = dem stat. Moment von βP; aber im ersten Fall wäre die Last und im letzten die Geschwindigkeit $= 0$, völlig wie bei dem Trittrad. Nun ist die vortheilhafteste Geschwindigkeit, mit der das unterschlächtige Rad getrieben wird $= \frac{1}{3}$ von der Geschwindigkeit, womit das Wasser an die Schaufeln schlägt, also hier =

$$\frac{10,5 \pm 1,5}{3} = 3,5 \pm 0,5 \text{ Fus,}$$

welches folglich die vortheilhafteste Geschwindigkeit ist, mit der die Thiere das Rad treten.

§. 318.

Wenn man nun das Trittrad als ein unterschlächtiges Wasserrad und die Thiere als das Aufschlagwasser, unter denen (§. 317.) erwähnten Bestimmungen, ansieht, so giebt sich das diesem Aufschlagwasser zugehörige Gefälle nebst der iede Sec. anschlagenden Wassermenge A so: es ist, wenn h das Gefälle, c die zugehörige Geschwindigkeit und g die bekannte Grösse 15,625 Rhl. Fus bedeutet, $h = \frac{c^2}{4g}$ also hier

$$h = \frac{(10,5 \pm 1,5)^2}{4 \cdot 15,625} \text{ oder}$$

$$74.) \quad h = 1,8 \pm 0,504 \text{ F.}$$

Weil nun hier der Werth des bei den unterschlächtigen Wasserrädern vorkommenden Eulerschen Koefficienten = 1 gesetzt werden muß, so ist

die anstosende Wassersäule $= \beta P$ und der Querschnitt dieses anstosenden Wasserstrahls =

$$\frac{\beta P}{1,8 \cdot \pm 0,504} \text{ Q. Fus}$$

also

also die iede Sec. anstoſende Wassermenge

$$A = \frac{\beta P}{1{,}8 \pm 0{,}504} \cdot (10{,}5 \pm 1{,}5) \text{ oder}$$

$$75.) \quad A = (6{,}076 \mp 0{,}868) \cdot \beta P$$

wo allemal das obere Zeichen auf Pferde, das untere auf Maulthiere geht, da dann die letzte Formel so zu verstehen ist, daß das erforderliche Aufschlagwasser statt der Pferde gebraucht, geringer ist, als stat: der Maulthiere gebraucht.

§. 319.

Das Bewegungsmoment dieses Rades ist wie mit der Lehre von den unterschlächtigen Rädern verglichen erhellet, genau

$$\tfrac{4}{27} Ah = \tfrac{4}{27} h \cdot \frac{\beta P}{1{,}8 \pm 0{,}504} \cdot (10{,}5 \pm 1{,}5)$$

also wegen der 74ten Formel

$$= \tfrac{4}{27} h \cdot \frac{(10{,}5 \pm 1{,}5) \cdot \beta P}{h} \text{ oder}$$

$$76.) \quad \begin{matrix}\text{Das Bew.}\\ \text{Moment}\end{matrix} = \left(\frac{14 \pm 2}{9}\right) \cdot \beta P$$

mithin bei Pferden $= \frac{16}{9} \beta P$, und bei Maulthieren $= \frac{12}{9} \beta P$; ienes verhält sich zu diesem, wie $16 \cdot \beta P : 12 \cdot \beta P = 12 \beta P : 9 \beta P$; also verhält sich der Effekt des Rades bei verschiedenen Thieren, wie das Produkt aus ihrer größten Geschwindigkeit in ihr statisches Moment, wie ohnehin schon aus den allgemeinen Lehren der Mechanik folgt.

§. 320.

Man darf also nun nur alles diesen Voraussetzungen gemäß berechnen, und dann das Rad von den Thieren nur mit der gehörigen Geschwindigkeit 3,5 ± 05 F. herumtreten, d. i. soviele Umdrehungen als diese Geschwindigkeit erfodert in ieder Minute machen lassen, so müssen die Thiere beständig von selbst an die gehörige Stelle treten.

§. 321.

Die Menge irgend einer Flüßigkeit = M, deren spec. Schwere wie bisher = γ sein soll, zu finden, die sich vermittelst eines Trittrades, das von Pferden oder Maulthieren getreten wird, deren

Gewicht = dem Gewicht der Waſſermenge P iſt, in ieder Sec. mit vereinbarten Saug- und Druckwerken auf die Höhe e + f + b (§. §. 265. d. Erl.) bringen läßt.

Aufl. Man hat allgemein aus der 49ten Formel

$$M = \frac{F\alpha}{\gamma \cdot (\nu\,(f + b) + \lambda \cdot g')}$$

Nun iſt hier wegen der Formel no. 76.

$$F\alpha = \left(\frac{14 \pm 2}{9}\right) \cdot \beta P$$

alſo

$$M = \frac{\left(\frac{14 \pm 2}{9}\right) \cdot \beta P}{\gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g')}$$

wo aber noch nicht auf die Friktion und die Veränderung des Moments wegen der Dicke der Wellzapfen iſt geſehen worden.

Auf dieſe Umſtände mitgeſehn, ſetze man nur in der 56ten Formel

$$k = 1$$
$$m = \infty$$
$$n = 0$$
$$\text{und } h = 1{,}8 \pm 0{,}504 \text{ (Form. no. 74.)}$$

$$\text{ſo giebt ſich } Z = \frac{q + \frac{1}{3}\varrho}{q \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right)} \times$$

$$\left(\frac{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f+b) + \lambda \cdot g')}{4 \cdot (1{,}8 \pm 0{,}504)} \cdot M + \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{r} + 4{,}5 \cdot \psi\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{g}{1{,}8 \mp 0{,}504}\right)}\right)$$

Nun giebt ſich aus dem Aufſchlagwaſſer das erforderliche Gewicht der Thiere oder P, wenn man das nöthige Aufſchlagwaſſer mit $(6{,}076 \mp 0{,}868) \cdot \beta$ dividirt. Dieß erhellet aus der 75ten Formel. Man hat alſo

77.)

$$77.)\quad P = \frac{q + \frac{1}{3}\varrho}{q \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right) \cdot \beta \cdot (6{,}076 \mp 0{,}868)} \times$$

$$\left(\frac{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f+b) + \lambda \cdot g') \cdot M}{7{,}2 \pm 2{,}016} + \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{r} + 4{,}5 \cdot \psi\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{g}{1{,}8 \pm 0{,}504}\right)}\right)$$

und hieraus folgt

$$\frac{q \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right) \cdot \beta \cdot (6{,}076 \mp 0{,}868)}{q + \frac{1}{3}\varrho} \cdot P$$

$$- \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{r} + 4{,}5 \cdot \psi\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{g}{1{,}8 \pm 0{,}504}\right)} =$$

$$\frac{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g') \cdot M}{7{,}2 \pm 2{,}016} \quad \text{also}$$

$$78.)\quad M = \frac{7{,}2 \pm 2{,}016}{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g')} \times$$

$$\left(\frac{q \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right) \cdot \beta \cdot (6{,}076 \mp 0{,}868)}{q + \frac{1}{3}\varrho} \cdot P - \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{r} + 4{,}5 \cdot \psi\right) \times \sqrt{\left(\frac{g}{1{,}8 \pm 0{,}504}\right)}\right).$$

§. 322.

Weil die Tritträder wie unterschlächtige Wasserräder anzusehen sind, so gilt auch von ihnen, was in Anfang (§. 271. d. Erl. erinnert worden ist, daß nämlich der Effekt des Rades, nicht von der Grösse seines Durchmessers abhängt. Unter 15 Fusen darf indessen kein Trittrad hoch sein, damit auch das größte Pferd beim Eintreten in dasselbe, noch völlig frei unter dem Wellbaum stehen kann; und meistens macht man sie viel grösser. Dieses ist auch wirklich deswegen rathsam, weil man bei einem grössern Rad die Thiere eher zu einem gleichförmigen Gang anhalten kann, als bei einem kleinern. Weder die schiefe Lage der tretenden Thiere, noch ihr Moment, ändert sich im größern Rad so

ſchnell als im kleinern, wenn das Thier etwa einmal um einen Schritt im Rad zurückbleibt. Es iſt daher gar nicht zu verwerfen, daß man ſich auf Salzwerken gerne ſehr hoher Tritträder bedient, ſondern man kann es vielmehr zur Regel machen:

VIII. **Man ſoll auf Salzwerken kein Trittrad anlegen, deſſen Durchmeſſer unter 30 Fuſe beträgt.**

§. 323.

Weil nun die Tritträder eine ſo beträchtliche Gröſſe erhalten, ieder Punkt des Umfangs aber nur eine Geſchwindigkeit $= 3,5 \pm 0,5$ F. hat, ſo würden, daferne der Krummzapfen des Trittrads *unmittelbar* mit einem Geſtänge, das durch ſeinen Hin- und Hergang, die Kolbenſtangen der Pumpen auf- und niedertreibt, verbunden würde, die Kolben einen zu langſamen Gang erhalten, von deſſen Schädlichkeit ich ſchon im Vorhergehenden geredet habe. Man iſt daher genöthigt, ſich dabei eines in einander greifenden Räderwerks zu bedienen.

§. 324.

Um auch bei dieſem Räderwerk die Friktion möglichſt zu vermeiden, muß man ſolches auf die einfachſte Art anlegen. Man verbindet daher blos den Wellbaum des Trittrades zugleich mit einem Sternrad, ſo daß Sternrad und Trittrad einen gemeinſchaftlichen Wellbaum haben. Die Zähne dieſes Sternrades, laſſe man in ein Getriebe eingreifen, an deſſen Welle erſt der Krummzapfen angebracht wird, den man unmittelbar mit dem Geſtänge verbindet. Sovielmal nun die Anzahl der Triebſtöcke in der Anzahl der Zähne enthalten iſt, ſoviele Kolbenſpiele gehen auf einen Umgang des Rades.

§. 325.

Die an den Räderwerk entſtehende Friktion an der Stelle, wo die Zähne in das Getriebe eingreifen, iſt nach den Lehren der Mechanik für die Ausübung ziemlich ſicher mit $\frac{1}{18}$ von dem Theil der Kraft, der am Umfang des Rades wirklich zum Druck verwandt wird, im Gleichgewicht (ſ. H. Hofr. Karſtens Lehrbegrif der geſ. Math. IV. Th. §. 406. u. f.) alſo hier mit $\frac{1}{18} \cdot \frac{4}{9} \beta P = 0,0247 \cdot \beta \cdot P$. Dieſes Räderwerk mit in Betrachtung gezogen, hat man alſo

$$79)\quad P = \frac{(1 + 0{,}0247 \cdot \beta) \cdot (q + \frac{1}{3}\varrho)}{q \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right) \cdot \beta \cdot (6{,}076 \mp 0{,}868)} \times$$

$$\left(\frac{9 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f+b) + \lambda \cdot g') \cdot M}{2{,}4 \pm 0{,}672} + \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{r} + 4{,}5 \cdot \psi\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{g}{1{,}8 \pm 0{,}504}\right)}\right)$$

und

$$80)\quad M = \frac{2{,}4 \pm 0{,}672}{9 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f+b) + \lambda \cdot g')} \times$$

$$\left(\frac{q\beta \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right) \cdot (6{,}076 \mp 0{,}868)}{(1 + 0{,}0247 \cdot \beta) \cdot (q + \frac{1}{3}\varrho)} \cdot P - \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{r} + 4{,}5 \cdot \psi\right) \times \sqrt{\left(\frac{g}{1{,}8 \pm 0{,}504}\right)}\right)$$

da man dann zu p nicht blos das Gewicht des Trittrads, sondern auch des Sternrads und des Trillings mit seiner Welle rechnen muß, oder eigentlich die Wassermenge, welche dieses Gewicht hat, in Cub. Fusen ausgedruckt. Sind die Wellzapfen des Trittrades und des Trillings in der Dicke verschieden, so wird man in der Ausübung nicht merklich fehlen, wenn man für ϱ das Mittel zwischen diesen beiden Dicken nimmt; nur im Quotienten $\frac{q + \frac{1}{3}\varrho}{q}$ müßte man eigentlich allemal für ϱ den Halbmesser vom Wellzapfen des Trillings gebrauchen.

§. 326.

Wenn bestimmt ist, was gewältiget werden soll, ein Trittrad zu solcher Absicht gehörig anzulegen.

Aufl. Man nimmt die Höhe des Rades willkührlich an, doch nach der VIIIten Regel nicht wohl unter 30 Fus; ferner den Durchmesser des Trillings und die Anzahl der Triebstöcke, gleichfalls nach Willkühr, bei deren Bestimmung man aber doch auf ihre und des Wellbaums Dicke mit zu sehen

hat *), desgleichen die Höhe der Kurbel, die man aber den obigen Gründen gemäß doch höchstens nur ein paar Fuse groß annimmt. Aus der willkührlich angenommenen Kurbelhöhe, bestimmt man weiter die Zeit eines Kolbenspiels der Regel (§. 271. d. Erl.) gemäß. Man berechnet ferner die Zeit, in der das Rad einmal herumkommt aus dem Umfang des Rades und der Geschwindigkeit des tretenden Thiers **) und nun giebt diese letztere Zeit mit der Zeit eines Kolbenspiels dividirt die Verhältnis der Anzahl Zähne des Sternrads zur Anzahl Triebstöcke des Trillings; und weil die Anzahl der Triebstöcke schon gleich anfangs bestimmt war, so hat man auch die Anzahl Zähne des Sternrads. Aus allen diesen Stücken, berechnet man nun alle zum Bau der ganzen Maschine gehörige Theile, bis auf die Breite des Rades, die man einstweilen nach Gutdünken anschlagen muß, woraus sich dann ihr Cub. Inhalt und das Gewicht der ganzen Maschine ergiebt; und wenn man nun noch ψ gehörig überrechnet und die Werthe von ν und λ auf die gewiesene Art sucht, so hat man aus der 79ten Formel den Werth von P, also zugleich das Gewicht welches die Thiere haben müssen, die das Trittrad treten sollen. Setzt man nun ferner das ohngefähre Gewicht Eines von der Art Thiere, die man zum Treten gebrauchen will, = dem Gewicht der Wassermenge p, und den Platz, den

*) Wenn man die Dicke eines Triebstocks samt der Zwischenweite zwischen zween Triebstöcken = 16 setzt, so ist die Dicke eines Zahns, samt der Zwischenweite zwischen zween Zähnen, zwar gleichfalls = 16; aber man macht die Dicke eines Triebstocks = 8 und eines Zahs = 7, daß also die Zwischenweite zwischen zween Triebstöcken = 8, und die zwischen zween Zähnen = 16 — 7 = 9 wird, damit auf solche Art sowohl ein Zahn zwischen zween Triebstöcken, als ein Triebstock zwischen zween Zähnen, noch gehörigen Spielraum behalte. Nachdem man mehr oder weniger Spielraum verlangt, kann man diese Eintheilung abändern, ich glaube aber, daß man sich der angegebenen in allen Fällen wird bedienen können. Uebrigens hängt die Dicke der Triebstöcke von der Holzart, der man sich dazu bedienen will, und dem Druck, den sie bei Wältigung der Last auszuhalten haben, und zugleich von ihrer Länge ab.

**) Wenn das Thier am Rad hinauf tritt, so ist nach einem jedesmaligen Umgang des Rades, der zurückgelegte Weg des Thiers, eigentlich nicht des Rades Umfang, sondern ein in diesem Umfang beschriebenes Vieleck, wovon jede Seite der Weite eines Schrittes von dem tretenden Thier gleich ist. Die Geschwindigkeit des Rades, ist also wirklich größer, als die des Thiers, und man müßte eigentlich den Umfang des gedachten Vielecks, statt des Rades Umfang gebrauchen, und jenen durch die Geschwindigkeit des Thiers dividiren, um die Zeit zu erhalten, in der das Rad einmal herumkommt. Da aber beide Grössen nur sehr wenig verschieden sind, und überdas die Zeit einer Umdrehung sich doch so völlig genau nicht festsetzen läßt, so wären dergleichen subtile Rechnungen hier lächerlich.

Digitized by Google

den es in die Breite nebst einem kleinen zu beiden Seiten nöthigen Spielraum braucht, = 2,5 Fus, so giebt sich auch noch die Anzahl der iedesmal im Rad tretenden Thiere $= \frac{P}{p'}$, und die erforderliche Breite des Rades $= \frac{2,5 \cdot P}{p'}$ Fus, und nun ist die gesammte Einrichtung der ganzen Maschine bekannt. Da übrigens die verschiedenen Thiere, wenn sie gleich zu einerlei Art gehören, doch sehr in ihrem Gewicht verschieden sind, so daß es z. B. Maulthiere von 5 bis 8 Ctrn. so wie Pferde von 7 bis 12 Ctrn. giebt, so fällt die Möglichkeit der Foderung in die Augen, daß $\frac{P}{p'}$ allemal eine ganze Zahl, wenigstens nicht beträchtlich von einer ganzen verschieden sein soll.

§. 327.

Eine nähere Anwendung dieser allgemeinen Auflösung, will ich weiter unten (§. 367.) beibringen. Hier wird noch die Frage zu entscheiden sein, welche Art von Kreaturen man zu Betreibung eines Trittrades zu wählen habe? Diese Frage gehörig zu beantworten, müßte man zuvor von ihrem Gewicht und ihrer größten Geschwindigkeit, die sie ohne zu entkräften, einige Stunden aushalten können, versichert sein. Wäre nun z. B. der Effekt der einen Kreatur nur halb so groß, als von der andern, diese aber wäre dreimal so kostbar zu unterhalten als die erstere, so würden drei Kreaturen der erstern Art gebraucht, noch halb so grossen Effekt leisten als Eine der letztern Art, und doch nicht kostbarer zu unterhalten sein; erstere Art wäre also nützlicher als die letztere. Ueberhaupt also wird sich der Nutzen einer Kreatur beim Trittrad verhalten, wie der Quotient ihres Effekts durch ihre Unterhaltungskosten dividirt. Zu diesen Unterhaltungkosten, muß der Lohn eines besondern dazu gemietheten Knechts, der für das Aus- und Einführen, Abwechslen, Füttern und Antreiben der Thiere zu sorgen hat, mitgerechnet werden, der dann, wann das Rad durch Menschen getreten wird, wegfällt, übrigens aber bei einer grössern oder kleinern Anzahl Thiere hier, wo ohnehin die größte Schärfe nicht zu erwarten ist, einerlei angenommen werden kann. Setzt man diesen Lohn = 50 Fl. jährlich, so wird sich die Verhältnis des Nutzens verschiedener Kreaturen, beim Trittrad, ohngefähr so ergeben, wie es nachstehende Tafel ausweist.

Eines

Eines	Menschens	Esels	Ochsens	Maulthiers	Pferds.
das Gewicht in Centnern	$1\frac{1}{2}$	3	8	7	9
die größte Geschwind. in Fusen	6	6	4	9	12
der Effekt	9	18	32	63	108
die jährliche Unterhaltungskosten	120	20 + 50	40 + 50	60 + 50	80 + 50
die Verhältnis des Nutzens	70	257	355	573	830 *)

Wenn auch gleich die hier angegebenen Zahlen noch Abänderungen verstatteten, so bleibt doch die Folge daraus richtig, daß Menschen am wenigsten, Pferde aber am meisten nützlich bei Tritträdern zu gebrauchen sind, und nächst den Pferden die Maulthiere. Die hier angegebene Verhältnis der Effekte dieser beiden Gattungen von Thieren 63 : 108 habe ich wirklich durch Erfahrungen bestätigt gefunden, aus welchen ich ersahe, daß ein Paar Pferde von etwa 18 Ctrn. ohngefähr noch einmal soviel leisteten als ein Paar Maulthiere von etwa 12 Ctrn. Da übrigens der Lohn des Knechtes nicht mit dem Gewicht oder der Anzahl der Thiere proportionirt zunimmt, so folgt, daß es sehr vortheilhaft sei, das Rad gleich aufangs so einzurichten, daß zwei oder drei starke Maulthiere oder Pferde neben einander darinnen gehen können. So kosten z. B. die Aufsicht mitgerechnet, zwei Pferde jährlich lange nicht doppelt soviel als eines, und fördern doch wirklich mehr als doppelt soviel Soole als Eines, wie aus der 8oten Formel erhellet.

§. 328.

Völlig genaue Berechnungen finden hier deswegen nicht statt, weil 1. die größte Geschwindigkeit der Thiere 2. deren Gewicht, keine völlig genaue Bestimmung zulassen. Daher ist auch eine noch genauere Bestimmung der Friktion, als ich hier gegeben habe, unnütz. Gleichwohl werden die hier angestellten Berechnungen, für die Ausübung nicht weniger sicher sein, als die über die unterschlächtigen Räder, weil letztere durch den noch ungewissen Werth des Eulerschen Koefficienten sowohl, als auch des vom Gefälle h, die beide in den Formeln über die Tritträder, ihre zuverläßige Werthe haben, etwas unsicher werden.

Von

*) Man sieht wohl, daß ich hierbei allemal die stärksten und schwersten Thiere von jeder Gattung voraussetze.

Von Aufförderung der Brunnensoole und damit verbundenen Fragen.

§. 329.

Ist das Wasser in einem Brunnen schon bis zu einer gewissen Höhe hinaufgestiegen, so steigt es bekanntlich langsamer, als wenn es sich noch niedriger in der Tiefe befindet, und der Ausfluß der Quellen wird desto schwächer, ie höher das Wasser im Brunnen stehe. Die Quellen zu visiren, muß man also eine gewisse Tiefe festsetzen, in der man das Wasser oder die Soole beständig erhalten will, und dann die Visirung für diese Tiefe vornehmen. Der vorzüglichste Umstand, der hierbei in Betrachtung zu ziehen ist, ist dieser, daß man die Soole beständig rein und hell erhalte, und dieserwegen ist es nicht rathsam, die Soole im Brunnen weiter als bis auf die drei letzten Fuse auszuschöpfen.

§. 330.

Man fasse die in einem Brunnen befindliche Quellen so, daß sie sich sämtlich in ein Behälter ABGFIHD (fig. 48.) ergiesen, das übrigens gestaltet sein mag, wie man will. Nur sollen alle seine Wände bis auf eine einzige die drei Fus hoch ist, über drei F. hoch sein. Dicht an die Wand HFI, die 3 F. hoch ist, muß ein parallelepipedisches Gefäß abgfed so angestellt sein, daß die aus dem Behälter überfliesende Soole hineinfällt und seine Grundfläche übrigens horizontal liegt; giebt man nun Acht, wie hoch nach und nach die Soole in diesem angestellten Gefäß steigt, so weis man aus der bekannten Grundfläche desselben, die Menge Soole, welche die Quellen in ieder gegebenen Zeit ausgiesen. Kürzer, und für diese Art von Untersuchungen hinreichend sicher, kann man so verfahren. Man läßt den Brunnen ganz ausschöpfen, und bemerkt alsdann die Zeit, worin die Soole bis auf die Höhe von 6 Fus steigt, und nimmt an, daß der Brunnen beständig in der Tiefe von 3 Fus erhalten, allemal in eben der Zeit eben soviel Soole gebe. Hat man nun gefunden, daß der Brunnen in ieder Sec. die Soolenmenge M liefere, so müssen die Bewegungskräfte für diesen Brunnen, so eingerichtet werden, daß durch sie iede Sec. die Soolenmenge M herausgeschafft werde, wenn anders der ganze Brunnen gehörig benutzt werden soll.

§. 331.

Um die obigen Formeln gehörig anwenden zu können, muß man die iedesmalige specifische Schwere der aufzufördernden Soole wissen d. i. den Werth von γ. Hierzu dient nachstehende Tafel, wo ich auch zugleich die Salzmengen angegeben habe, die in der Folge zur Anordnung der Bewegungskräfte zu wissen nöthig sind. Wegen dieser Salzmengen muß ich indessen noch folgendes bemerken. Wenn Salzwasser schweer als süses Wasser ist, so rührt dieses grössere Gewicht, nicht blos von Salztheilgen, sondern noch von andern mit süsem Wasser vermischten Materien her. Die sogenannte **Bitterlauge** oder **Mutterſoole**, die einen wesentlichen Theil der Soole ausmacht, und bei Auskochung der Soole allemal zuletzt übrig bleibt, macht allein einen sehr beträchtlichen Theil der Masse aus, die kein Salz giebt und doch wegen ihrer erstaunend hohen Löthigkeit noch sehr viel Salz geben sollte. Bei einem von meinem Bruder deshalb auf einem Heßischen Salzwerk angestellten Versuch, fand sich, daß blos diese Bitterlauge den 7ten Theil des bewirkten Salzes, nach dem Gewicht gerechnet, betrug. Ausserdem führen die Soolen gewöhnlich auch noch eine Kalk- oder Gypserde mit sich, die gleichfals die in der Tafel angegebene Salzmengen um etwas vermindert. Der beträchtlichste Umstand aber, welcher macht, daß eine gewisse Menge Brunnensoole beim Versieden, nach vorhergegangener gehöriger Gradirung, weit weniger Salz liefert, als die Tafel hier verspricht, ist dieser, daß durch die Gradirung selbst, nicht blos süse Wassertheilgen, sondern wirklich immer noch Sooltheilgen, die freilich meistens nur ungemein wenig salzigt sind, verfliegen. Soll z. B. ein Cub. Fus 1 löthiger Soole, der 16 Kannen halten soll, 16löthigt werden, so müssen 15 Kannen abdunsten, oder auf den Gradirgebäuden von der Luft hinweggeweht werden. Man kann leicht denken, wieviele noch ziemlich salzigte Sooltheilgen noch unter diesen 15 Kannen sich befinden müssen, und wie leicht es daher bei einigem windigten Wetter möglich ist, daß die 15 weggewehte Kannen, merklich mehr Salztheilgen enthalten, als die eine übriggebliebene. Ich kann auch aus Erfahrung versichern, daß wirklich von 1 löthiger Soole, die man im Sommer auf den Gradirgebäuden bis zur 16 löthigen gradirt, bei gehöriger Aufsicht auf die Gradirung, kaum die Hälfte der Brunnensoole wirklich 16 löthig wird und also das Salz zur Hälfte mit verfliegt. Ich gestehe, daß diese Angabe bei sorgfältigern Beobachtungen, als mir solche anzustellen bisher noch ist verstattet gewesen, vielleicht Abänderungen leidet, darf aber doch vermuthen, daß sie im Ganzen von der Wahrheit nicht sehr abweichen kann. Um nun von dieser Voraussetzung nähern Gebrauch machen zu können, muß ich erst noch einige andere Sätze berühren.

§. 332

§. 332.

Die erforderliche Verdünstung von der ν löthigen Soole bis sie μ löthig wird, heiſe $\odot$, die von der ϱ löthigen bis sie λ löthig wird $\mathfrak{C}$; ferner die Soolenmenge, die man der Verdünstung ausseſzt $\hbar$, die Menge der ν löthigen Soole die durch die Gradirung $\odot$ verlohren geht $\frac{\hbar}{p}$, und die durch die Verdunstung $\mathfrak{C}$ von der ϱ löthigen verlohren geht, $\frac{\hbar}{q}$, so seze ich

$$\frac{\hbar}{p} : \frac{\hbar}{q} = \odot : \mathfrak{C}$$

also

$$\frac{\hbar}{q} = \frac{\hbar}{p} \cdot \frac{\mathfrak{C}}{\odot}$$

§. 333.

Aus dem Beitrag zur Aufnahme der Salzwerkskunde S. 26. φ ist in der dortigen Bedeutung der Buchstaben

$$\mathfrak{C} : \odot = \left(1 - \frac{R}{L}\right) : \left(1 - \frac{N}{M}\right)$$
$$= M \cdot (L - R) : L \cdot (M - N)$$

also nach der leztern Formel des vor. §.

$$\frac{\hbar}{q} = \frac{\hbar}{p} \cdot \frac{M \cdot (L - R)}{L \cdot (M - N)}$$

und

$$81.) \quad q = \frac{L \cdot (M - N) \cdot p}{M \cdot (L - R)}$$

Zur weitern Anwendung dieſer Formel dient die folgende Tafel:

Löthigkeit der Soole	Specifische Schwere	Gewicht von einem Cub. Fus	Gewicht der in 1 C. Fus Soole enthaltenen Salzmenge.
0 —	1,000 —	68, Pf. —	0 Pf.
1 —	1,007 —	68,476 —	0,6847
2 —	1,014 —	68,952 —	1,3790
3 —	1,021 —	69,428 —	2,0828
4 —	1,027 —	69,836 —	2,7934
5 —	1,035 —	70,380 —	3,5190
6 —	1,042 —	70,856 —	4,2513
7 —	1,049 —	71,332 —	4,9932
8 —	1,056 —	71,808 —	5,7446
9 —	1,063 —	72,284 —	6,5055
10 —	1,071 —	72,828 —	7,2828
11 —	1,078 —	73,304 —	8,0634
12 —	1,086 —	73,848 —	8,8617
13 —	1,093 —	74,324 —	9,6621
14 —	1,101 —	74,868 —	10,4815
15 —	1,108 —	75,344 —	11,3016
16 —	1,116 —	75,888 —	12,1422
17 —	1,123 —	76,364 —	12,9818
18 —	1,130 —	76,840 —	13,8312
19 —	1,138 —	77,384 —	14,7029
20 —	1,145 —	77,868 —	15,5736
21 —	1,153 —	78,404 —	16,4648
22 —	1,160 —	78,880 —	17,3536
23 —	1,168 —	79,424 —	18,2675
24 —	1,175 —	79,900 —	19,1760

§. 334.

Setze ich nun in der 81ten Formel $\nu = 1$, $\mu = 16$, so giebt die Tafel

$$N = 0{,}6847 \text{ ℔}$$
$$M = 12{,}1422$$

Nach

Nach (§. 331. d. Erl.) geht nun von 1 löthiger Brunnenſoole bis ſie 16-löthig gradirt wird, die Hälfte d. i. $\frac{h}{2}$ verlohren, das giebt alſo $p = 2$; und nun ſubſtituire man in der 81ten Form. dieſe drei Werthe für N, M und p, ſo ergiebt ſich

$$q = \frac{2 \cdot L \cdot (12,1422 - 0,6847)}{12,1422 \cdot (L - R)}$$

oder 82.) $q = \frac{1,88 \cdot L}{L - R}$

So geht alſo von ieder ϱ löthigen Soole, bis ſie durch die Gradirung λ löthig wird $\frac{1}{q}$ d. i. $\frac{L - R}{1,88 \cdot L}$ verlohren. Es iſt bei dieſer Rechnung hinreichend, nur zwo Decimalſtellen aus der vorigen Tafel zu gebrauchen, und ſo läßt ſich vermittelſt der gemeinen logarithmiſchen Tafeln, die Rechnung ſehr leicht durch Logarithmen führen.

1 Ex. Den Theil zu beſtimmen, der durch die Gradirung von 6 löthiger Soole verlohren geht, bis ſolche 16 löthig wird.

Aufl. Hier iſt $\lambda = 16$, $\varrho = 6$, alſo aus der Tafel (§. 333. d. Erl.)

$L = 12,14$
$R = 4,25$
$L - R = 7,89$

und nun $\log (L - R) = 4,8970770 - 4$
$\log 1,88 = 0,2741578$
Add. $\log L = 1,0842187$
$\log 1,88 \cdot L = 1,3583765$

Folglich $\log \frac{L - R}{1,88 \cdot L} = 3,5387005 - 4$

und die zugehörige Zahl giebt

$$\frac{L - R}{1,88 \cdot L} = 0,34$$

oder von dieſer Soole geht etwa $\frac{1}{3}$ verlohren, bis ſie 16 löthig wird.

2 Ex. Den Theil zu bestimmen, der von 1 löthiger Soole verlohren geht bis sie 2löthig wird.

Aufl. Hier ist $\lambda = 2, \varrho = 1$ also nach der Tafel

$$L = 1{,}38$$
$$R = 0{,}68$$
$$L - R = 0{,}70$$
$$\text{und } \log L - R = 3{,}8450980 - 4$$
$$\log 1{,}88 = 0{,}2741578$$
$$\text{Add. } \log L = 0{,}1398791$$
$$\log 1{,}88 . L = 0{,}4140369$$
$$\log \frac{L - R}{1{,}88 . L} = 3{,}4310611 - 4$$
$$\text{also } \frac{L - R}{1{,}88 . L} = 0{,}27$$

oder es geht schon etwas über den 4ten Theil verlohren.

§. 335.

Wenn ich nun den Verlust des Salzes im Auskochen selbst = 0,12 dessen, was von der in die Pfanne gelassenen Soole zu erwarten wäre, setze, so darf von der Salzmenge, die man aus einer gegebenen Menge Brunnensoole nach der Tafel (333.) erwarten könnte, mehr nicht als

$$\left(1 - \frac{L - R}{1{,}88 \cdot L}\right) \cdot (1 - 0{,}12)$$

d. i. $$0{,}88 \cdot \left(1 - \frac{L - R}{1{,}88 \cdot L}\right)$$

wirklich erwarten.

§. 336.

Digitized by Google

§. 336.

Wenn der Zugang der Luft in die Saugröhre und in den Stiefel unter dem Kolben völlig verhindert wird, so kann man da, wo der Barometerstand 28 Zolle beträgt, beim Saugwerk $f + b$ beinahe $= 32$ Rhl. Fus setzen; weil aber iene Voraussetzung nicht genau statt hat, so will ich $f + b = 31$ Rhl. Fus als die Gränze der Höhe ansehen, auf welcher das süse Wasser, bei der erwähnten Barometerhöhe, sicher von der Atmosphäre im leeren Raum erhalten werden kann. Um nun für iede löthige Soole den größten Werth zu haben, der sich für $f + b$ annehmen läßt, muß man 31 durch die Zahlen der 2ten Col. vorstehender Tafel dividiren. Daraus giebt sich folgende Tafel, aus der sich nun leicht für ieden andern Barometerstand, der zugehörige Werth von $f + b$ ergiebt. So gäbe sich z. B. an einem Ort, wo das Barometer nur 26 Zoll hoch stünde, der Werth von $f + b$ für 18 löthige Soole durch folgende Proportion:

$$28 : 26 = 27{,}43 : \text{gesuchten Zahl}$$

wo also $f + b = \frac{26 \cdot 27{,}43}{28} = 25{,}47$ Rhl. Fus wäre.

Wenn ich übrigens in vorkommenden Berechnungen den Werth von $f + b$ gebrauche, so setze ich allemal der Kürze wegen den Barometerstand $= 28$ Zoll voraus.

Löthigkeit der aufzuziehenden Soole.	Zugehörige größte Werthe von $f + b$. für den Barometerstand von 28 Zoll.
0	31,00 Rhl. Fus.
1	30,78
2	30,57
3	30,36
4	30,18
5	29,95
6	29,75
7	29,55
8	29,35
9	29,16
10	28,95
11	28,75
12	28,54

Löthigkeit der aufzuziehenden Soole.	Zugehörige größte Werthe von f + b für den Barometerstand von 28 Zoll.
13	28,26 Rhl. Fus.
14	28,16
15	27,97
16	27,77
17	27,60
18	27,43
19	27,24
20	27,07
21	26,88
22	26,72
23	26,54
24	26,38

§. 337.

Bei einem Brunnen, der 21öthige Soole enthielte, fandt ich, daß die Soole vom Boden an, in 300 Minuten, um 6 Fus hoch stiege. Der Durchmesser des Brunnens im Lichten, betrug 16 Fus; man verlangt die Bestimmung derer zu diesem Brunnen nöthigen Bewegungskräfte.

Aufl. Man suche zuerst die in dieser Zeit hervorgequollene Soolenmenge. Des Brunnens Fläche war, weil sein Halbmesser 8 F. betrug, $= 3,141 \cdot 8^2 = 201$ Q. F. folglich die hervorgequollene Soolenmenge $= 6 \cdot 201 = 1206$ Cub. F. in 300 Min. Dieses beträgt in einer Minute $\frac{1206}{300} = 4$ C. F. und in einer Sec. $= \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$ C. F. Man hat also hier nach (330. §. d. Erl.)

$$M = \frac{c}{15} \text{ Cub. Fus.}$$

Das Gefälle des vorhandenen Aufschlagwassers sei $3\frac{1}{2}$ Fus, also ein unterschlächtiges Rad zu gebrauchen, und die Höhe, auf welche die Soole aus der Tiefe gehoben werden soll, betrage 60 Fus. Um nun ein vereinbartes Saug- und Druckwerk gehörig anzulegen, verfährt man nach (§. 267. d. Erl.) auf folgende Art:

I. Man

I. Man bestimme vor allen Dingen die Höhe des Kolbenzugs nach (§. 274. d. Erl.). Sie wird hier $= 3 + \frac{3\frac{1}{2}}{4} = 3\frac{7}{8}$ Fus. Daraus giebt sich zugleich der Halbmesser des Rades $= 1{,}258 \cdot 3\frac{7}{8}\sqrt{3{,}5} = 9{,}11$ Fus.

II. Nun ist nach der Tafel §. 336. der gröſte Werth, den hier f + b haben darf, = 30,57 F. Ich will daher hier

$$f + b = 30 \text{ Fus}$$

setzen, das giebt

$$f = 30 - 3\frac{7}{8} = 26\frac{1}{8} \text{ Fus}$$

und $$e = 60 - 30 = 30 \text{ Fus}$$

Die Steigröhre nehme ich vertikal an; man müßte zu dem Ende über dem Brunnen ein Gebäude aufführen, und oben auf demselben die Soole in ein Behälter ausgiesen lassen, woraus es dann vermittelst Röhren durch seinen natürlichen Fall von selbst an den verlangten Ort kommen könnte. Das giebt also die Länge der Steigröhre für ein eigentliches Druckwerk $l = b + e = 3\frac{7}{8} + 30 = 33\frac{7}{8}$ Fus.

III. $\frac{c}{a}$ will ich $= \frac{4}{7}$ setzen.

IV. Weil $b = 3\frac{7}{8}$, so ist der Weg eines ganzen Kolbenspiels $= 2b = 7\frac{3}{4}$, also

$$t = \frac{7\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}} = 11\frac{5}{8} \text{ Sec.}$$

nach der ersten Regel (271. §. d. Erl.)

V. Nun sucht man nach (§. 267. d. Erl. no. II.) den Werth von g'; es giebt sich hier aus der 33ten Formel

$$g' = e + \tfrac{1}{2}b = 30 + 1\tfrac{1}{16} = 31\tfrac{1}{16} \text{ F.}$$

VI. und nun nach der Form. no. 27.

$$\blacktriangledown = \frac{31\frac{1}{16} \cdot 16 \cdot (11\frac{5}{8})^2}{0{,}256 \cdot 33\frac{7}{8} \cdot 3\frac{7}{8} \cdot 25}$$

Man hat aber $31\frac{1}{16} \cdot 16 = \frac{511}{16} \cdot 16 = 511$; $33\frac{7}{8} = \frac{271}{8}$; $3\frac{7}{8} = \frac{31}{8}$, und $11\frac{5}{8} = \frac{93}{8}$

also $$w = \frac{511 \cdot 93^2}{0{,}256 \cdot 8^2 \cdot \frac{271}{8} \cdot \frac{31}{8} \cdot 25}$$

$$= \frac{511 \cdot 93^2}{0{,}256 \cdot 271 \cdot 31 \cdot 25}$$

welches sich in Logarithmen so giebt

l 511	=	2,7084209
2 l 93	=	3,9369658
log des Zählers	=	6,6453867

Ferner

log 0,256	=	2,4082400 — 3
l 271	=	2,4329693
l 31	=	1,4913617
l 25	=	1,3979400
log des Nenners	=	4,7305110

Diesen vom log des Zählers abgezogen, giebt

$$\log w = 1{,}9148757$$

also $$w = 82$$

und nach der 26ten Formel

$$\lambda = 1 + \frac{1}{w} = 1{,}012$$

VII. Nun folgt nach (267. IV.) die Berechnung für das Saugwerk. Es soll nämlich

$$\frac{d}{D} = \frac{3{,}141\sqrt{2l}}{t\sqrt{g}} \text{ sein}$$

wo

wo aber l die Länge der Saugröhre bedeutet, weil solche einige Fuse noch unter Wasser steht, so ist sie grösser als f, und ich will daher hier

$$l = 28 \text{ Fus}$$

setzen; das giebt

$$\frac{d}{D} = \frac{3{,}141\sqrt{\frac{56}{15{,}625}}}{11\frac{1}{2}} = 0{,}432$$

VIII. Nun wird aus (no. V. 267.) nach der Formel (no. 15 *)

$$w = \frac{2f}{b} = \frac{56}{3\frac{1}{2}} = 14{,}4$$

also $$v = 1 + \frac{1}{w} = 1{,}069$$

IX. Das Gewicht des ganzen Rades liese sich nun auch ohne Schwierigkeit berechnen; weil ich aber eine solche ausführliche Berechnung in der Folge noch beibringen werde, so will ich mich hier nicht damit aufhalten, weil auch ohnehin keine große Schärfe dabei nöthig ist. Nach einem ohngefähren Ueberschlag wird man annehmen dürfen, daß sich das ganze Rad mit dem Wellzapfen im Gewicht = 44 C. Fusen Wasser setzen läßt. Man setzt also in der 56ten Formel

$$p = 44.$$

X. Nimmt man des Rades Schaufeln $\frac{2}{3}$ Fus hoch, so kann man nach (§. 166. d. Erl.)

$$n = \frac{360^\circ}{\text{Ang sinv}\,(\frac{2}{3} : 10)} = \frac{360^\circ}{\text{Ang sinv}\ 1 : 15} = \frac{360^\circ}{\text{Ang sinv. } 0{,}06666\ldots}$$

setzen; nun ist

$$\text{Ang. sinv } 0{,}06666\ldots = \text{Ang Cos } 1 - 0{,}06666\ldots = \text{Ang Cos } 0{,}93333\ldots$$

also = 21° 5′, und daher beinahe

$$n = \frac{360}{21} = 17$$

XI. Nimmt man die Schaufeln einstweilen $\frac{1}{4}$ F. lang an, so hätte man

$$\eta = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \text{ Q. Fus}$$

XII. Ist der Spielraum um die Schaufel herum $\frac{1}{2}$ Zoll breit, so ist seine Fläche $= 16 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16$ Q. Zoll; nun ist

$$\eta = 120 \text{ Q. Zoll}$$

also die Fläche des Spielraums $= \frac{16}{120} \cdot \eta = \frac{1}{7,5} \cdot \eta$, daher $\frac{1}{m} = \frac{1}{7,5}$

und $m = 7,5$

XIII. Weil $b = 3\frac{7}{8}$ F. so hat man

$$q = 1\frac{15}{16} \text{ F.}$$

und für den Halbmesser der Wellzapfen setze ich

$$\varrho = 0,2 \text{ F.}$$

XIV. Aus der obigen Tafel hat man die spec. Schwere der 2 löthigen Soole

$$\gamma = 1,0014$$

XV. Nun ist in der Form. no. 56. nichts mehr zu suchen übrig, als der Werth von ψ; diesen zu bestimmen, muß man erst aus der 30ten Formel den Durchmesser des Stiefels berechnen, wo man das n nicht mit dem n hier no. X. verwechslen darf. Setzt man nun $T = 1$, $M = \frac{1}{12}$, $n = \frac{1}{2}$ und für t, π und b ihre bekannte Werthe, so erhält man den Durchmesser des Stiefels

$$D = a = \sqrt{\frac{11\frac{4}{8} \cdot \frac{1}{12}}{\frac{1}{4} \cdot 3,141 \cdot 3\frac{7}{8}}} = 2\sqrt{\frac{93}{15 \cdot 3,141 \cdot 31}}$$

also $\log a = \log 2 + \frac{1}{2} \log 93 - \frac{1}{2} (\log 15 + \log 3,141 + l\ 31)$

Es ist aber

	$\log 2$	$= 0,3010300$
	$\frac{1}{2} \log 93$	$= 0,9842414$
1.	Summe	$= 3,2852714 - 2$
	$\log 15$	$= 1,1760913$
	$\log 3,141$	$= 0,4970679$
	$\log 31$	$= 1,4913617$
2.	Summe	$= 3,1645209$
	halbirt	$= 1,5822604$

Diese

Diese Hälfte von der ersten Summe abgezogen, läßt

$$\log a = 1{,}7030110 - 2$$

$$\text{also } a = 0{,}5 \text{ Fus} = 6 \text{ Zoll.}$$

Demnach wird nur ein 6zölliger Stiefel bei dieser Anordnung in den Brunnen erfodert. Wenn ich nun für ieden 6zölligen Stiefel die Kraft, die mit der Friktion am Kolben im Gleichgewicht ist, = 9 ℔ anschlage, so widersetzt sich solche der Bewegung der Warze wie das Gewicht von $\frac{2}{17}$ C. F. Wasser, mit dem am Umfang des Rades das Gewicht von $\frac{q}{r} \cdot \frac{2}{15} = \frac{1\frac{1}{16}}{9{,}11} \cdot \frac{2}{15}$ = 0,028 C. F. im Gleichgewicht ist. Das giebt also

$$\psi = 0{,}028$$

und nun sind alle Grössen im Werth von Z (Formel no. 56.) bekannt, und es läßt sich also Z selbst angeben, wobei ich nur noch erinnere, daß sowohl der Quotient $\frac{q + \frac{1}{3}\rho}{q}$ als der Werth von γ hier ohne merklichen Fehler = 1 gesetzt werden darf.

XVI. Man hat nämlich $Z = \dfrac{2 \cdot 7{,}5}{(3 \cdot 7{,}5 - 1) \cdot \left(1 - \frac{0{,}2}{3 \cdot 9{,}11}\right)}$

$$\times \left(\frac{27 \cdot \left(1{,}069 \cdot 30 + 1{,}012 \cdot 31\frac{15}{16}\right)}{4 \cdot 3{,}5} \cdot \frac{1}{15} \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1{,}5 \cdot 44 \cdot 0{,}2}{9{,}11} + 4{,}5 \cdot 0{,}028 + \frac{9 \cdot 17 \cdot 3{,}5 \cdot \frac{1}{8}}{14000}\right) \sqrt{\frac{15{,}625}{3{,}5}} \right)$$

$$= 0{,}775 \cdot (8{,}278 + 1{,}606 \cdot 2{,}11)$$

= 9 Cub. Fus Aufschlagwasser in ieder Sec. um das Rad mit dem vereinbarten Saug- und Druckwerk zu betreiben.

Um nun die Voraussetzung in (XI.) zu prüfen, berechne man aus dem gefundenen Z den Werth von η (Form. no. 44.); es giebt sich $\eta = \frac{9}{7,39} =$ 1,21 Q. F. und das giebt die Länge der Schaufeln $= \frac{1,21}{\frac{5}{6}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1,21 \cdot 6}{4} =$ 1,81 Fus $= 21\frac{3}{4}$ Zoll.

XVII. Nun berechne man m in XII. von neuem. Des Spielraums Querschnitt findet sich $= 21,75 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 10,88 + 8 = 18,88$ Q. Zoll $= 0,13$ Q. Fus $= \frac{0,13}{1,21} \cdot \eta = \frac{1}{9,3} \cdot \eta$ daher $\frac{1}{m} = \frac{1}{9,3}$ und $m = 9,3$ folglich $\frac{m}{m-1} = \frac{9,3}{8,3} = 1,12$.

Nach (XII.) aber war $\frac{m}{m-1} = \frac{7,5}{6,5} = 1,15$ und man müste also das vorhin gefundene Z noch mit $\frac{1,12}{1,15} = 0,974$ multipliciren, um Z richtiger zu erhalten; So erhält man nun

$$Z = 9 \cdot 0,974 = 8,76 \text{ C. Fus}$$

welches vom vorigen nicht beträchtlich verschieden ist. Das Glied $\frac{9nh\eta}{14000}$ ist ohnehin hier und in den meisten Fällen unbeträchtlich und hat daher keine Berichtigung wegen des veränderten η nöthig.

XVIII. Zur völligen Anordnung dieser Maschine ist nun noch übrig, den Durchmesser c der Steigröhre und d der Saugröhre zu bestimmen.

Man hat nämlich aus (III.) $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ also

$$c = \frac{4}{5}a = \frac{4 \cdot 6}{5} = 4\frac{4}{5} \text{ Zoll}$$

und aus (VII.) $\frac{d}{D} = 0,432$ also

$$d = 0,432 \cdot D = 0,432 \cdot 6 = 2,592 \text{ Zoll}$$

und

und zu dieser Saugröhre sollte man, wenn sie von Tannenholz gemacht wird, einen Stamm nehmen, dessen Durchmesser nicht unter $4 \cdot 2{,}59 = 10{,}36$ Zoll beträgt (§. 243. d. Erl.)

§. 338.

Ich komme ietzt zu der Aufgabe, die häufig vorkommt, wenn nicht alle Brunnensoole, die eine Quelle liefert, benutzt werden kann, nämlich die zu einem Brunnen erfoderliche Bewegungskräfte zu bestimmen und anzuordnen, um eine gegebene Anzahl von Gradirung damit gehörig zu fourniren. Ehe ich diese wichtige Aufgabe näher untersuchen kann, muß ich erst noch einige Erfahrungssätze zum Grund legen. Ich erinnere hierbei, daß ich mich an die ehemalige Abhandlung, die ich der Kuhrpfälz. ökon. Ges. eingeschickt habe, gar nicht halten werde, weil ich in derselben verschiedene Erfahrungen zum Grund gelegt habe, die ich erst nachher näher zu prüfen Gelegenheit hatte. Abweichungen der jetzigen Abhandlung von der damaligen, rühren also nicht von ietziger Unachtsamkeit her, sondern von einer genauern Prüfung.

I. Bei 1wändiger Gradirung, wo die Dornwand vom Boden des Baßins gerechnet, etwa 24 Fus hoch reicht, die Brunnensoole 1 löthig ist und den heisen Sommer über 16löthig im Frühjahr und gegen die Mitte des Septembers hin aber etwa nur 13löthig und so nach Verhältnis der Witterung geringer löthig versotten werden soll — denn einerlei Löthigkeit der Siedsoole läßt sich nicht für die ganze Siedzeit annehmen — läßt sich den Salzabgang abgerechnet, bei mittelmäßiger Witterung, hinlänglichen Bewegungskräften und 8 monatlicher Gradirung auf ieden laufenden Fus des Gradirbaus 0, 8 Achtel Salz, das Achtel zu 200 ℔, rechnen

II. Bei 2 wändiger Gradirung unter eben diesen Voraussetzungen auf ieden laufenden Fus des Gradirbaus 1,4 dergleichen Achtel.

§. 339.

Aus einer Abhandlung, die ich zu denen Actis Acad. elector. Erfurd. 1779. eingeschickt habe, entlehne ich folgenden Satz:

Soole verdunstet nicht gleich stark, sondern stärkere langsamer als schwächere, so daß sich die Geschwindigkeit der Verdünstung von der ν löthigen Soole bis sie auf den Gradirgebäuden μ löthig wird, zu der Verdünstung von der ϱ löthigen bis solche λ löthig wird, verhält wie

$$\sqrt{(50 - (\nu + \mu))} : \sqrt{(50 - (\varrho + \lambda))}$$

§. 340.

§. 340.

Die Menge der Brunnensoole für ieden Gradirbau anzugeben, wenn überhaupt auf solchem ν löthige Soole bis zur μ löthigen gradirt werden soll.

Aufl. Die Verdünstung der 1löthigen Soole bis zur 16löthigen, verhält sich zur Abdünstung von der νlöthigen bis zur μlöthigen, wenn die in der 1 und 16löthigen Soole enthaltenenen Salzmengen aus der obigen Tafel genommen werden, wie

$$\left(1 - \frac{0,6847}{12,1422}\right) : \left(1 - \frac{N}{M}\right) \text{ oder wie}$$

$$0,943 \cdot M : (M - N)$$

Weil sich nun die zu einem Bau erfoderliche Brunnensoole umgekehrt wie die nöthige Abdünstung verhält, so ist für gleich starke Verdünstung, wenn die von der νlöthigen Soole erfoderliche Menge ψ heist und die von der 1löthigen θ,

$$\theta : \psi = (M - N) : 0,943 \cdot M$$

und

$$\psi = \frac{0,943 \cdot M \cdot \theta}{M - N}$$

also wegen (§. 339. d. Erl.)

$$\psi = \frac{\sqrt{(50 - (\nu + \mu))}}{\sqrt{(50 - (1 + 16))}} \cdot \frac{0,943 \cdot M \cdot \theta}{M - N}$$

wo nur noch θ bestimmt werden muß.

§. 341.

Der Werth von θ giebt sich auf folgende Art.

I. Für einwändige Gradirung. Der laufende Fus liefert 160 ℔ Salz (338 no. I. d. Erl.) Wenn nun die Soole so viel Salz lieferte, als die obige Tafel ausweist, und die Anzahl Cub. Fuse 1löthiger Soole, welche hiernach 160 ℔ Salz liefern θ heist, so ist

$$0,6847 : 1 = 160 : \theta$$

also

$$\theta = \frac{1600000}{6847} = 234 \text{ Cub. Fus}$$

und

und ſo wäre alſo für ieden laufenden Fus 1wänd. Gradirung

$$\psi = \frac{\sqrt{(50 - (\nu + \mu))}}{\sqrt{(50 - (1 + 16))}} \cdot \frac{0{,}943 \cdot M}{M - N} \cdot 234 \text{ Cub. Fus.}$$

Aber wegen (§. 335. d. Erl.) muß dieſe Zahl noch mit

$$\frac{1}{0{,}88 \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right)}$$ multiplicirt werden, und ſo erhält man endlich

$$\psi = \frac{\sqrt{(50 - (\nu + \mu))}}{\sqrt{(50 - (1 + 16))}} \cdot \frac{0{,}943 \cdot M}{M - N} \cdot \frac{234}{0{,}88 \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right)}$$

$$= \frac{251 \cdot M \cdot \sqrt{(50 - (\nu + \mu))}}{(M - N) \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right) \cdot \sqrt{(50 - 1 + 16)}}$$

oder

83.) $$\psi = \frac{43{,}7 \cdot M \cdot \sqrt{(50 - (\nu + \mu))}}{(M - N) \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right)} \text{ C. F.}$$

Soviel wird nämlich die ganze 8 monatliche Gradirzeit über, auf ieden laufenden Fus erfodert. Folglich für 100 laufende Fuſe

$$\psi = \frac{4370 \cdot M \cdot \sqrt{(50 - (\nu + \mu))}}{(M - N) \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right)} \text{ C. F.}$$

II. Für zweiwändige Gradirung giebt ſich alſo

$$\psi = \frac{1{,}4 \cdot 4370 \cdot M \cdot \sqrt{(50 - (\nu + \mu))}}{0{,}8 \cdot (M - N) \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right)}$$

oder 84.) $$\psi = \frac{7647 \cdot M \sqrt{(50 - (\mu + \nu))}}{(M - N) \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right)} \text{ C. F.}$$

gleichfals für laufende 100 Fuse während der ganzen 8 monatlichen Gradirzeit.

§. 342.

Wenn die Einrichtung mit Aufförderung der Brunnensoole so gemacht wird, daß diese Soolenmenge in 3100 Stunden auf den Gradirbau kommt, so ist die auf 100 laufende Fuse in einer Stunde erforderliche Soolenmenge

I. Bei einwändiger Gradirung =

$$\frac{4370\ M \cdot \sqrt{(50 - (\mu + \nu))}}{3100\ (M - N) \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}83 \cdot M}\right)}$$

$$= \frac{1{,}41 \cdot M \cdot \sqrt{(50 - (\mu + \nu))}}{(M - N) \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right)}$$

II. Bei zweiwändiger Gradirung =

$$\frac{7647\ M \cdot \sqrt{(50 - (\mu + \nu))}}{3100 \cdot (M - N) \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right)}$$

$$= \frac{2{,}467 \cdot M \cdot \sqrt{(50 - (\mu + \nu))}}{(M - N) \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right)}$$

dividirt man noch mit 3600, so erhält man für iede Secunde auf 100 laufende Fus Gradirung die erforderliche Brunnensoole ψ'

I. Bei einwändiger

85.) $$\psi' = \frac{0{,}00039 \cdot \sqrt{(50 - (\mu + \nu))}\ M}{(M - N) \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right)}$$ C. F.

II. Bei zweiwändiger

86.) $$\psi' = \frac{0{,}00068 \cdot M \cdot \sqrt{(50 - (\mu + \nu))}}{(M - N) \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right)}$$ C. F.

§. 343.

§. 343.

Hätte der Bau oben unter dem Dach noch eine dritte Wand etwa halb so hoch als eine untere, so würde eine solche Wand etwa halb soviel als eine untere leisten, also $\frac{1}{2}$ soviel als beide untere zusammen, und weil $\frac{1}{4} \cdot 0{,}00068 = \frac{0{,}0034}{4} = 0{,}00085$ ist, so hätte man

III. Bei dreiwändiger Gradirung

87.) $$\psi' = \frac{0{,}00085 \cdot M \cdot \sqrt{(50 - (\mu + \nu))}}{(M - N) \cdot \left(1 - \frac{M - N}{1{,}88 \cdot M}\right)}$$ Cub. F.

§. 344.

Die Frage, wie sich die Salzmenge, die ein Gradirbau liefert, worauf νlöthige Soole bis zur μlöthigen gradirt wird, zu der Salzmenge verhält, die eben der Gradirbau aus der 1 löthigen, die bis zur 16 löthigen gradirt wird, liefert; wird hier völlig so wie in meiner ehemaligen Abhandlung §. 84. beantwortet. Wenn nämlich gleich dort die Soolenmenge, die wegen (§. 335. d. Erl.) weiter auf den Bau kommen muß, als nach der obigen Tafel zur Erhaltung einer gewissen Salzmenge schon hinreichend wäre, nicht in Anschlag gekommen ist, so hebt das die Sicherheit des dortigen Verfahrens für die Ausübung doch nicht auf, da eben diese weitere Soolenmenge wieder verlohren geht und also kein Salz giebt. Ich setze daher den dortigen Satz unverändert hierher. Es ist nämlich falsch, wenn man annimmt, eben der Gradirbau liefere von der ν löthigen Brunnensoole

$\frac{N}{0{,}6847}$ mal

oder welches die gewöhnliche Rechnung ist, ν mal

} soviel Siedsoole als von der 1 löthigen.

Die angeführte gewöhnliche Rechnung ist allemal unrichtig, und die andere würde nur dann ihre Richtigkeit haben, wann von der ν löthigen Soole eben soviel auf den Bau käme als von der 1 löthigen, und über das die Verdünstung bei starken und schwachen Soolen einerlei wäre. Dieser beiden Umstände wegen muß, wenn die Siedsoole überhaupt μ löthig gesetzt wird, der Quotient

$\frac{N}{0,6847}$ noch mit $\frac{0,943 \cdot M}{M - N} \cdot \frac{\sqrt{(50 - (\mu + \nu))}}{\sqrt{(50 - (1 + 16))}}$ *) multiplicirt werden, und so liefert also einerlei Gradirbau von der ν löthigen Soole

$$88.) \quad \frac{0,943 \cdot M \cdot N \cdot \sqrt{(50 - (\mu + \nu))}}{0,6847 \cdot (M - N \cdot \sqrt{(50 - (16 + 1))}}$$

mal soviel Salz als von der 1 löthigen.

Ex. Die Menge Salz zu finden, die ein zweiwändiger 500 F. langer Gradirbau liefert, wenn die mittlere Löthigkeit der Siedsoole μ 14 löthig und die Brunnensoole $1\frac{1}{2}$ löthig ist.

Aufl. Man berechne zuerst die zu $1\frac{1}{2} = \nu$ gehörige Salzmenge N aus der obigen Tafel. Es ist nämlich

(2 — 1)

*) Ich habe schon im Vorhergehenden erinnert, daß die vortheilhafteste Löthigkeit der Siedsoole veränderlich ist und mit von der Witterung abhängt. Wenn es mitten im Sommer am vortheilhaftesten ist, die Soole bis zu 18 löthig zu gradiren, so kann es gegen das Ende des Octobers hin, vielleicht am vortheilhaftesten sein, sie nur bis zu 10 löthig zu gradiren; diese 18 und 10 müßte man zu diesen verschiedenen Zeiten statt μ setzen. Aber um den sovielten Theil μ zu verschiedenen Zeiten kleiner als sein größter Werth wäre, um den sovielten Theil müßte man auch die Zahl 50 im Zähler und Nenner verändern. Dieß würde den Werth von $\sqrt{\left(\frac{50 - (\mu + \nu)}{50 - (1 + 16)}\right)}$ eben nicht beträchtlich abändern. Es sei z. B. für $\nu = 2$ der kleinste Werth von μ gegen den November hin 10, der größte im Juli und August 18, so setzt man im ersten Fall statt $\sqrt{\left(\frac{50 - (\mu + \nu)}{50 - (16 + 1)}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{\frac{18}{10} \cdot 50 - (10 + 2)}{\frac{18}{10} \cdot 50 - 17}\right)} = \sqrt{\left(\frac{15,7}{10,7}\right)}$ und der Werth hiervon ist $\sqrt{1,46} = 1,20$; im andern Fall bleibt 50 unverändert, und der Werth der Wurzelgröße findet sich $= \sqrt{0,9090} = 0,95$. Wiewohl nun hier beide Werthe von μ äuserst weit von einander genommen sind, so sind die Werthe beider Wurzelgrössen dennoch nur um etwa $\frac{1}{5}$ verschieden, und wenn man also für μ ein gehöriges Mittel nimmt (hier z. B. 16) und die 50 darnach gleichfalls gehörig abändert (z. B. in 44.) so wird man mit völliger Sicherheit rechnen können. Nach einem so genommenen mittlern Werth von der vortheilhaftesten Löthigkeit der Siedsoole gegen den größten gehalten, muß man eigentlich allemal in den bisherigen Rechnungen, wo diese Wurzelgröße vorkommt, die Zahl 50 abändern, so wird man für die Ausübung sicher genug gehen.

Digitized by Google

$$(2 - 1) : (1,3790 - 0,6847) = (2 - 1\tfrac{1}{7}) : x$$

$$\text{und} \quad x = \frac{2 \cdot 0,6943}{3} = 0,4628$$

folglich die gesuchte Salzmenge

$$N = 1,3790 - 0,4628 = 0,9162$$

Ferner ist hier $\mu = 14$ also aus der obigen Tafel die zugehörige Salzmenge

$$M = 10,4815 \text{ tb.}$$

und weil ieder laufende Fus des Gradirbaus von der 1 löthigen Brunnensoole, wenn solche 16 löthig gradirt wird, 1,4 Achtel Salz liefert, so liefert der laufende Fus im Ex.

$$\frac{0,943 \cdot 10,4815 \cdot 0,9162 \cdot \sqrt{(50 - 15\frac{1}{7})}}{0,6847 \cdot (10,4815 - 0,9162) \cdot \sqrt{(50 - 17)}} \cdot 1,4$$

wenn die 88te Formel gebraucht wird. Ist aber nun der gröſte Werth von μ, so hoch nämlich die Soole im heisen Sommer gradirt wird, 16, so setzt man $\frac{14}{16} \cdot 50$ d. i. etwa 44 statt 50, und so liefert ieder laufende Fus

$$1,3827 \cdot \sqrt{\left(\frac{44 - 15\frac{1}{7}}{44 - 17}\right)} \cdot 1,4$$

$$= 2 \text{ Achtel}$$

und der ganze Bau liefert demnach

$$500 \cdot 2 = 1000 \text{ Achtel}$$

iedes Achtel zu 200 tb. (§. 338.) Wäre der Bau einwändig, so dürfte man die gefundene Achtelzahl nur mit $\frac{0,8}{1,4}$ d. i. mit $\frac{4}{7}$ multipliciren, und so liefert also der 500 F. lange einwändige Gradirbau, wenn sonst alles wie vorhin bleibt

$$\frac{4}{7} \cdot 1000 = 571 \text{ Achtel.}$$

Von Betreibung derer Gradirhäuser.

§. 344.

Wenn die Soole aus dem Brunnen aufgefördert und in die Baſins derer Gradirhäuser geleitet worden ist, so wird aus solchen bekanntlich die Soole weiter in die Höhe, nämlich in die über den Dornwänden befindliche Tröge aufgezogen. Weil nun die so aufgezogene Soole aus diesen Trögen, vermittelst der Krahnen beständig wieder herabtröpfelt, und in das untere Baſin fällt, so

muß man dahin sehen, daß iede Stunde soviel Soole in die Tröge hinaufgezogen werde, als in einer Stunde aus den Trögen herabtröpfelt. Die Bewegunskräfte müssen aber so angeordnet werden, daß sie hinreichen einen Gradirbau auch bei starken Abtröpfeln zu betreiben, und ich werde daher die folgenden Sätze auf die Voraussetzung gründen, daß

ein 4 Fus breiter und $\frac{1}{4}$ F. tiefer Trog auf einem einwändigen Gradirbau in 12 Stunden etwa 4 mal, auf einem einwändigen aber etwa 9 mal herabtröpfle.

Der zweiwändige Bau hat nämlich vier Reihen Krahne, da der einwändige nur zwo Reihen hat, und weil die Soole auf dem zweiwändigen Gradirbau, ohne die Gefahr vom Wind so leicht wie beim einwändigen verlagt zu werden, etwas stärker über die Wände tröpfeln darf als beim einwändigen, so wird begreiflich, warum ich die Menge der abtröpfelnden Soole beim zweiwändigen Gradirbau mehr als doppelt so groß annehme als beim einwändigen. Wem übrigens meine zum Grund gelegte Voraussetzung nicht gefiele, dem wird es leicht sein, meine Rechnungen auf irgend eine andere Voraussetzung anzuwenden. Wenn er z. B. nach meiner Rechnung findet, daß zu Betreibung eines Gradirbaus iede Sec. 6 Cub. Fus Aufschlagwasser erfodert werden, und er verlangt nur eine $\frac{2}{3}$ so starke Betreibung, als meine Voraussetzung fodert, so kann er annehmen, daß nach seiner Voraussetzung etwa $\frac{2}{3} \cdot 6 = 4$ C. F. Aufschlagwasser schon hinreichen, und kann also doch allemal, wenn er will, die Rechnung so wie hier geschieht führen, und das Resultat am Ende der Rechnung seiner Absicht gemäß abändern. Er kann aber auch gleich anfangs die Rechnung nach seiner Voraussetzung so führen, wie ich sie iezt nach der meinigen führen werde.

§. 345.

Der cubische Inhalt von einem laufenden Fus des beschriebenen Trogs beträgt $4 \cdot \frac{1}{4} = 5$ C. F. Dieser lauft nun auf einem einwändigen Gradirbau in 12 St. 4 mal herab, also lauft auf einem solchen Gradirbau auf iedem laufenden Fus in 12 Stunden etwa $4 \cdot 5 = 20$ C. F. Soole und so auf einem zweiwändigen etwa $9 \cdot 5 = 45$ C. F. Wegen des beigesetzten etwa wird es mir verstattet sein, hieraus folgenden Satz zu ziehen:

Für ieden laufenden Fus Gradirung, muß in 12 Stunden 32 ± 13 C. F. Soole aufgezogen werden.

da

da dann das obere Zeichen auf 2wändige, das untere auf 1wändige Gradirhäuser geht. Das trägt auf iede Stunde $\frac{32 \pm 13}{12}$ also auf iede Secunde

$$\frac{32 \pm 13}{12 \cdot 3600} = \frac{32 \pm 13}{43200} \text{ C. F.}$$

§. 346.

Die für 100 laufende Fus ein- und zweiwändiger Gradirung iede Secunde aus dem untern Baßin in den Trog zu ziehende Soolenmenge, ist also

$$89.) \quad = \frac{32 \pm 13}{432} = 0{,}074 \pm 0{,}030 \text{ C. F.}$$

§. 347.

Die zu $\sigma \cdot 100$ Fus sowohl einfacher als doppeltwändiger Gradirung nöthige Bewegungskräfte zu bestimmen.

Aufl. Man seße nur $M = (0{,}074 \pm 0{,}030) \cdot \sigma$ (Form. no. 89.) so giebt sich

I. Für ein unterschlächtiges Rad (Form. no. 56.) das nöthige Aufschlagwasser. *)

$$90.) \quad Z = \frac{2m \cdot (q + \frac{1}{3}\varrho)}{3 \cdot (m-1) \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right)} \times$$

$$\left(\frac{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f+b) + \lambda \cdot g') \cdot \sigma}{4h} \cdot (0{,}074 \pm 0{,}03) + \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{r} + 4{,}5 \cdot \psi\right)\sqrt{\frac{g}{h}}\right) \text{ C. F.}$$

II.

*) In dieser Art von Anwendungen kann die Gröſſe $\frac{9nh\varrho}{14000}$ allemal wegbleiben, so wie auch meistens der Quotient $\frac{q + \frac{1}{3}\varrho}{q}$, weil er meistens sehr nahe $= 1$ ist.

II. Für ein oberschlächtiges Rad (Form. no. 71.)

$$91.)\quad Z = \frac{q + \frac{1}{3}\varrho}{q\beta} \cdot \left(\alpha \cdot \sigma\,(0{,}074 \pm 0{,}03) + \left(\frac{p\varrho}{3r} - \frac{k\alpha\sigma}{\zeta} \cdot (0{,}074 \pm 0{,}03) \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta})\sqrt{\frac{\delta}{u} + \psi} \right) 2\sqrt{g\,u} \right)$$

Cub. Fus.

III. Für ein Trittrad (Form. no. 77.) das nöthige Gewicht der Pferde oder Maulthiere

$$92.)\quad P = \text{dem Gewicht von}$$

$$\frac{q + \frac{1}{3}\varrho}{q \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right) \cdot \beta \cdot (6{,}076 \mp 0{,}868)} \times \left(\frac{27 \cdot \gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot g') \cdot (0{,}074 \pm 0{,}03) \cdot \sigma}{7{,}2 \pm 2{,}016} + \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{r} + 4{,}5 \cdot \psi \right) \times \sqrt{\left(\frac{g}{1{,}8 \pm 0{,}504} \right)} \right)$$ C. Fus Wasser.

Die letzte Formel giebt P für 4 verschiedene Fälle

1.) Für Pferde
2.) Für Maulthiere
3.) Für einwändige Gradirhäuser
4.) Für zweiwändige.

In dem Ausdruck $0{,}074 \pm 0{,}03$ bezieht sich das zweideutige Zeichen auf die Gradirung, da dann das obere auf zweiwändige das untere auf einwändige geht;

In den übrigen Ausdrücken bezieht sich dieses zweideutige Zeichen auf die Gattung der Thiere, so daß das obere auf Pferde und das untere auf Maulthiere geht.

§. 348.

Wenn die Bewegunskräfte gegeben sind, die Anzahl ϑ von Gradirung in laufenden Fusen zu bestimmen, die sich hinreichend damit betreiben läßt.

Aufl. Man hat also Z und P, und daraus geben die obigen Formeln (no. 57; 72 und 78.) den Werth von M. Nun hat man aus (Form. no. 89.)

$$(0{,}074 \pm 0{,}03) : M = 100 : \vartheta$$

$$\text{also} \quad \vartheta = \frac{100 \cdot M}{0{,}074 \pm 0{,}03} \text{ Fuse.}$$

Man setze also aus den genannten Formeln nur den Werth von M, so erhält man

I. Für unterschlächtige Räder (Form. no. 57.)

$$93.) \quad \vartheta = \frac{400 \cdot h}{27 \cdot (0{,}074 \pm 0{,}03) \cdot \gamma \cdot (\nu(f+b) + \lambda \cdot g')} \times \left(\frac{3 \cdot (m-1) \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right)}{2 \cdot m \cdot (q + \frac{1}{3}\varrho)} \cdot Z - \left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{r} + 4{,}5 \cdot \psi \right) \cdot \sqrt{\frac{g}{h}} \right)$$

Fus.

II. Für oberschlächtige Räder (Form. no. 72.)

$$94.) \quad \vartheta = \frac{100 \cdot \frac{\zeta}{\alpha} \cdot \left(\frac{q\beta}{q + \frac{1}{3}\varrho} \cdot Z - 2 \cdot \left(\frac{p\varrho}{3r} + \psi \right) : \sqrt{gu} \right)}{(0{,}074 \pm 0{,}03) \cdot (\zeta - k \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta}) \cdot 2\sqrt{g\delta})}$$

Fus.

III. Für Tritträder (Form. no. 78.)

$$95.)\quad \vartheta = \frac{100\cdot(7{,}2 \pm 2{,}016)}{27\cdot(0{,}074 \pm 0{,}03)\cdot\gamma\cdot(\nu\cdot(f+b)+{}^{1}\lambda\cdot g')}\times$$

$$\left(\frac{q\cdot\left(1-\frac{\varrho}{3r}\right)\cdot\beta\cdot(6{,}076 \mp 0{,}868)}{q+\frac{1}{3}\varrho}\cdot P-\left(\frac{1{,}5\cdot p\varrho}{r}+4{,}5\cdot\psi\right)\times\right.$$

$$\left.\sqrt{\left(\frac{g}{1{,}8 \pm 0{,}504}\right)}\right)\text{ Fus.}$$

§. 349.

Ein Bach, der 4 Fus Gefälle = h hat, wirft in ieder Secunde 20 C. Fus Waſſer = Z aus; man ſucht die Länge ϑ des einwändigen Gradirbaus, der ſich vermittelſt eines gleich dabei angelegten unterſchlächtigen Rades, gehörig betreiben läßt.

Aufl. Man kann die Rechnung völlig in der Ordnung wie (§. 337. d. Erl.) führen. Alſo

I. Man beſtimme nach (§. 274. d. Erl.) die Höhe des Kolbenzugs b. Man findet $b = 3 + \frac{4}{4} = 4$ Fus. Und hieraus giebt ſich des Rades Halbmeſſer $= 1{,}258 \cdot 4 \cdot \sqrt{4} = 10{,}064$ Fus.

II. Man bedient ſich hier, wie auf Gradirgebäuden allgemein geſchieht ſolange die Höhe der Wände ſolches verſtattet, bloſer Saugwerke. Und weil ich dieſe Wände 24 Fus hoch annehme, vom Boden des Baßins bis an den Boden des Trogs, auſſerdem aber die Soole noch über die Dornwand bis zu einer Ausgußkännel, die nach dem Trog zu ablauft, welches ich zu 2 Fuſe rechnen will, gehoben werden muß, ſo hat man

$$f + b = 24 + 2 = 26 \text{ Fus}$$

alſo $$f = 26 - b = 26 - 4 = 22 \text{ Fus}$$

III. Weil hier $2b = 8$ iſt, ſo hat man

$$t = \frac{8}{\frac{2}{3}} = \frac{24}{2} = 12 \text{ Sec.}$$

für die Zeit eines ganzen Kolbenſpiels.

IV. Die

IV. Die Berechnung des Druckwerks fällt hier weg, und es folgt also gleich (no. VII. in 337. d. Erl.) Man soll nämlich

$$\frac{d}{D} = \frac{3,141\sqrt{2l}}{t\sqrt{g}}$$

nehmen. Nun kann man hier $l = f$ setzen, so hat man

$$\frac{d}{D} = \frac{3,141 \cdot \sqrt{44}}{12\sqrt{15,62}}$$

Nun ist

log 3,141	=	3,4970679 — 3
Add. $\frac{1}{2}$ log 44	=	0,8217263
Summe	=	4,3187942 — 3
log 12	=	1,0791812
Add. $\frac{1}{2}$ log 15,62	=	0,5968405
Summe	=	1,6760217

die letztere Summe von der erstern abgezogen giebt

$$\log \frac{d}{D} = 2,6427725 - 3$$

$$\text{also } \frac{d}{D} = 0,439$$

V. Nun wird wie (§. 337. no. VIII. d. Erl.)

$$w = \frac{2f}{b} = \frac{44}{4} = 11$$

$$\text{also } y = 1 + \tfrac{1}{11} = 1,09$$

VI. Ich setze hier wie (337. no. IX.)

$$p = 44$$

VII. Die Schaufelfläche η ist $= \frac{Z}{\sqrt{gh}} = 2,52$ Q. F $= 362,88$ Q. Zoll. Nimmt man sie also 15 Zoll hoch, so kann man sie 2 Fus breit machen.

VIII. Wenn ich den Spielraum zwiſchen den Gränzen der Schaufeln und der Rinne $= \frac{1}{2}$ Zoll breit ſetze, ſo giebt ſich des Spielraums Fläche $= 25 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 27\frac{1}{2}$ Q. Zoll, mithin $\frac{1}{m} = \frac{27,5}{362,88}$ beinahe $= \frac{1}{13}$ alſo $m = 13$.

IX. $q = \frac{b}{2} = 2$ Fuß.

X. $\varrho = 0,2$ Fuß.

XI. Die Soole will ich im Mittel auf den zu beſtimmenden Gradirbau 6 löthig annehmen, das gäbe aus obiger Tafel

$$\gamma = 1,042$$

Wenn man hieraus ϑ gefunden hat, ſo müßte man nach einer unten (§. 356.) vorkommenden Aufgabe, γ aufs neue beſtimmen, und nach dieſem neuen Werth das gefundene ϑ berichtigen. Es iſt aber zur gegenwärtigen Abſicht dieſes ſcharfe Verfahren nicht nöthig.

XII. Ich will einſtweilen annehmen, es können 8 6zöllige Stiefel betrieben werden, ſo rechne ich die Friktion bei iedem Kolben wie (337. no. XV.) zu 9 ℔ oder $\frac{9}{144}$ C. F. Zu ieder Kolbenſtange gehört nun ein kleiner Theil des Geſtänges, das gleichfalls einige Friktion macht, deren Moment aber ſehr gering iſt, wie ich unten (§. 354. no. X.) ausführlicher zeigen will. Ich will daher die Friktion eines ieden Kolbens mit der vom zugehörigen Geſtänge herrührenden zuſammen $= \frac{2}{144} = \frac{1}{72}$ C. F. rechnen, ſo beträgt die geſammte Friktion aller 8 Pumpen mit Geſtänge $\frac{8}{72}$ C. F. (d. h. ſoviel als das Gewicht von $\frac{8}{72}$ C. F. Waſſer.) Nun iſt hier $\frac{q}{r} = 0,2$ alſo

$$\psi = 0,2 \cdot \tfrac{8}{72} = 0,23 \text{ C. F.}$$

XIII. $\sqrt{gh} = 7,94$ alſo $\sqrt{\frac{g}{h}} = 1,98$.

XIIII. Nun laſſen ſich die einzelen Ausdrückungen der 93ten Formel ſtückweis berechnen. Man hat fürs erſte

$$\frac{3 \cdot (m - 1) \cdot q}{2 \cdot m \cdot (q + \frac{1}{3}\varrho)} = \frac{3 \cdot (13 - 1) \cdot 2}{2 \cdot 13 \cdot 2,07}$$

$$= 1,34$$

Ferner

Ferner $\left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right) \cdot Z = \left(1 - \frac{0,2}{30}\right) \cdot 20 = 18,66$

also $\frac{3 \cdot (m-1) \cdot q \cdot \left(1 - \frac{\varrho}{3r}\right)}{2 \cdot m \cdot (q + \frac{1}{3} \cdot \varrho)} \cdot Z = 1,34 \cdot 18,66$

$= 25,004$

Hiervon abgezogen

$$\left(\frac{1,5 \cdot p\varrho}{r} + 4,5 \cdot \psi\right)\sqrt{\frac{g}{h}} = \left(\frac{1,5 \cdot 44 \cdot 0,2}{10} + 4,5 \cdot 0,23\right) \cdot 198$$

$$= 2,355 \cdot 1,98$$

$$= 4,663$$

giebt den eingeschlossenen Faktor der 93ten Formel

$$= 25,004 - 4,663 = 20,34$$

Weil nun hier $g' = o$ ist, so ist hier

$$\nu \cdot (f+b) + \lambda \cdot \gamma' = \nu (f+b) = 1,09 \cdot 26$$

$$= 28,34.$$

In dem Ausdruck 0,074 + 0,03, gebraucht man hier nach (347 d. Erl. am Ende) das untere Zeichen, und so wird dieser Ausdruck = 0,074 − 0,03 = 0,044; ferner 27 · γ = 27 · 1,042 = 28,13 also der Nenner im ersten Faktor der 93ten Formel =

$$28,13 \cdot 0,044 \cdot 28,34$$

der Zähler ist 400 · h = 1600, also nun

$$\vartheta = \frac{1600 \cdot 20,34}{28,13 \cdot 0,044 \cdot 28,34}$$

$$= \frac{16 \cdot 2034}{28,13 \cdot 0,044 \cdot 28,34}$$

Es ist aber log. 16 = 1,2041200

Add. log. 2034 = 3,3083509

1.) Summe = 4,5124709

Ferner $\log 28{,}13 = 1{,}4491697$

Add. $\log 0{,}044 = 1{,}6434527 - 3$

$\log 28{,}34 = 1{,}4523998$

2.) Summe $= 1{,}5450222$

die zwote Summe von der ersten abgezogen, giebt

$\log \vartheta = 2{,}9674487$

also $\vartheta = 928$ Fus.

XV. Ich hatte anfangs angenommen, daß 8 6zöllige Pumpen gebraucht würden. Dieses nun genauer zu untersuchen, setze man (Form. no. 30.) $t = 12$, $n = 4$, $b = 4$, $T = 1$, und $M = \frac{928}{100} \cdot 0{,}074 - 0{,}03$ (89te Form.) $= 9{,}28 \cdot 0{,}044 = 0{,}408$ und $\frac{1}{2}\pi = \frac{3{,}141}{2} = 1{,}57$, das giebt a oder hier

$$D = \sqrt{\left(\frac{0{,}408 \cdot 12}{1{,}57 \cdot 4 \cdot 4}\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{4{,}896}{1{,}57}}$$

$= 0{,}44$ Fus $= 5{,}28$ Zoll

woraus soviel erhellet, daß die angenommene Voraussetzung für die Berechnung des Werths von ψ zu groß war. Man setze also nur $n = 3$, das gäbe

$$D = \sqrt{\frac{0{,}408 \cdot 12}{1{,}57 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{489{,}6}{4{,}71}}$$

$= 0{,}51$ F. $= 6\frac{1}{8}$ Zoll

daß man also, ψ zu berechnen, mehr nicht als etwa 3 Paar 6zöllige Pumpen in Anschlag bringen darf, das giebt

$\psi = 0{,}2 \cdot \frac{5}{7} = 0{,}17$

statt $0{,}23$

Es geht also von dem vorhin berechneten Werth von

$\left(\frac{1{,}5 \cdot p\varrho}{r} + 4{,}5 \cdot \psi\right)\sqrt{\frac{g}{h}}$ noch $4{,}5 \cdot 0{,}06 \cdot \sqrt{\frac{g}{h}} = 4{,}5 \cdot 0{,}1188$

=

= 0,534 ab, und ſo bleibt 4,663 — 0,534 = 4,129 alſo der eingeſchloſſene Faktor = 25,004 — 4,129 = 20,875 ſtatt 20,34. Folglich nunmehr

$$9 = \frac{20,875}{20,34} \cdot 928 = 952 \text{ Fus.}$$

XVI. Aus (no. IV.) iſt

$$\frac{d}{D} = 0,439$$

alſo $d = 0,439 \cdot 0,51 = 0,224$ Fus.
$= 2,688$ Zoll
$= 2$ Zoll $8\frac{1}{4}$ Linie

für den vortheilhafteſten Durchmeſſer der Saugröhre.

§. 350.

Weil man annehmen kann, daß überhaupt die Zeit eines Kolbenſpiels t allemal zwiſchen 8 und 15 Sec. liegen wird, ſo wie die Länge der ganzen Saugröhre l bis an den unterſten Kolbenſtand, meiſtens zwiſchen 8 und 24 Fus fällt, ſo habe ich mir die Mühe genommen, in nachſtehender Tafel die vortheilhafteſte Gröſſe vom Durchmeſſer der Saugröhre, für t von 8 bis 15 Sec. und l von 18 bis 24 Fus zu berechnen. Den Durchmeſſer des Stiefels habe ich dabei = 1,000 angenommen.

Werthe von l	t = 8	t = 9	t = 10	t = 11	t = 12	t = 13	t = 14	t = 15
8 Fus	0,397	0,353	0,317	0,288	0,264	0,244	0,226	0,211
9	0,418	0,372	0,334	0,304	0,279	0,257	0,239	0,223
10	0,441	0,392	0,353	0,321	0,294	0,271	0,252	0,235
11	0,463	0,411	0,370	0,337	0,309	0,285	0,264	0,247
12	0,483	0,429	0,386	0,351	0,322	0,297	0,276	0,257
13	0,503	0,447	0,403	0,366	0,335	0,310	0,287	0,268
14	0,522	0,464	0,418	0,380	0,348	0,321	0,298	0,278
15	0,540	0,480	0,432	0,393	0,360	0,332	0,309	0,288
16	0,561	0,499	0,449	0,408	0,374	0,345	0,321	0,299
17	0,578	0,512	0,463	0,421	0,386	0,356	0,330	0,308
18	0,595	0,527	0,476	0,433	0,397	0,366	0,340	0,317
19	0,611	0,543	0,489	0,445	0,408	0,376	0,349	0,326
20	0,627	0,558	0,502	0,456	0,418	0,386	0,358	0,335
21	0,643	0,571	0,514	0,467	0,428	0,396	0,367	0,343
22	0,658	0,585	0,526	0,478	0,439	0,405	0,376	0,351
23	0,673	0,598	0,538	0,489	0,419	0,414	0,385	0,393
24	0,687	0,611	0,550	0,500	0,458	0,423	0,393	0,367

Die Decimalbrüche zeigen die Grösse vom Durchmesser der Saugröhre, wie solche in iedem Fall, dem neben in der ersten Vertikalreihe stehenden Werth von l, und oben in der ersten Horizontalreihe stehenden t zugehört, wenn der Durchmesser des Stiefels = 1 ist; ist also der Durchmesser des Stiefels in einem gewissen Maas gegeben, so geben diese Decimalbrüche mit dem gegebenen Durchmesser des Stiefels multiplicirt, den zugehörigen Durchmesser der Saugröhre in eben dem Maas.

Ex. Es betrage die Höhe von der untern Oefnung der Saugröhre, bis an den niedrigsten Kolbenstand 22 Fus, der Durchmesser des Stiefels 8 Zoll, und die Pumpe giese alle 10 Secunden einmal aus, so nehme man in dieser Tafel l = 22, t = 10, und suche die Zahl, die mit l = 22 in einer Horizontal- und mit t = 10 in einer Vertikalreihe liegt, so findet man 0,526; diese mit dem gegebenen Durchmesser des Stiefels = 8 Zoll multiplicirt giebt

den Durchmesser der Saugröhre = 8 · 0,526 = 4,208 Zoll.

§. 351.

§. 351.

Man ſieht hieraus, daß in den meiſten Fällen die Saugröhre beträchtlich weiter gemacht werden muß, als es von den gewöhnlichen Kunſtmeiſtern aus Unwiſſenheit geſchieht. Vermuthlich bohren ſie die Röhren zu Saugröhren gewöhnlich deswegen ſo enge, weil ſie ſolches in Abſicht der erforderlichen Kraft für gleichgültig halten, übrigens aber engere Röhren gegen das Eindringen der Luft beſſer geſchützt ſind als weitere. Wenn man indeſſen nach (§. 243. d. Erl.) verfährt, ſo wird man dagegen hinreichend geſchützt ſein. So müßte man im gegenwärtigen Fall zur Saugröhre einen Stamm wählen, der an ſeiner ſchwächſten Stelle wenigſtens $4 \cdot 4{,}208 = 16{,}832$ oder nicht unter 17 Zoll im Durchmeſſer hätte und übrigens völlig geſund wäre. Ohnehin müſſen zu einem Saugwerk, das eine hölzerne Saugröhre hat, von Zeit zu Zeit neue Saugröhren genommen werden.

§. 352.

Es können Fälle in der Ausübung vorkommen, wo man ſehr viele Umſtände zu überlegen hat, um nur einigermaßen zu berechnen, worauf man ſich bei Anlegung eines Kunſtrades verlaſſen könne. Eine ſolche vorläufige Berechnung wird beſonders dann nothwendig, wenn viele mit der Anlegung eines ſolchen Rades verbundene Koſten auf die Frage führen, *ob es auch wohl vortheilhaft ſei, ein ſolches Rad anzulegen?* Eben dieſe Frage fiel während meinem Aufenthalt auf dem Salzwerk zu * ** wirklich vor. Dieſes Salzwerk hat in Anſehung der Bewegungskräfte eine ſehr ungünſtige Lage; es liegt in einem Thal ganz von flieſendem Waſſer abgeſondert; ienſeit eines Berges etwa eine halbe Stunde von dem Salzbrunnen flieſt ein nicht unbeträchtlicher Bach, der aber viel tiefer als der Boden des Salzwerks liegt und daher auch durch einen Stollen nicht dahin zu leiten iſt. Dieſes zeigte nicht nur ſchon das bloſe Augenmaas, ſondern auch eine deshalb von mir ſelbſt vorgenommene Abwägung; ich gieng dabei den kürzeſten Weg über den Berg hinüber, und fand, daß des Bergs höchſte Gegend um 142 Fus über dem Boden des Salzwerks und um 178 Fus über dem Waſſerſpiegel des erwähnten Bachs hervorragte, und daß alſo des Bachs Oberfläche noch um 36 Fus unter dem Boden des Salzwerks lage. Man gerieth daher endlich auf den Einfall, von fünf hinter einander gelegenen Mühlen, drei zu erkaufen und abzuſchaffen, den Bach ſelbſt weiter oben abzugraben, und ihm etwa auf eine halbe Meile weit eine neue Bahn vorzuſchreiben, um ihn dadurch ſoviel möglich in der Höhe fortzuleiten und am Ende den ganzen Fall von allen drei Mühlen zuſammen zu erhalten, nebſt dem beträchtlichen Gefälle, das noch zwiſchen dieſen Mühlen bis-

her unbenutzt liegen geblieben war. Ich nahm deshalb selbst wieder eine Abwägung vor, und fand, daß der Bach auf die ganze Strecke von einer halben Meile 34 Fus Gefälle hatte, Am Ende dieses neuen Grabens wollte man alsdann ein oberschlächtiges Rad anlegen, und von da das Wasser wieder nach der alten Bahn zu ablaufen lassen, um es der vierten Mühle wieder zuzuführen *). Diese Anstalten waren also mit nicht geringen Kosten verbunden, und weil das Rad selbst von dem Anfang des Baues, den es zunächst betreiben sollte, noch bei 4000 Fus entfernt war; so war die Frage, ob die darauf zu verwendenden Kosten auch nicht zu groß gegen den zu erwartenden Vortheil sein, wohl nicht überflüßig. Man wollte es zunächst gebrauchen, einen Gradirbau nicht nur mit der nöthigen Brunnensoole zu versehen, sondern ihn auch selbst gehörig zu betreiben. Man hatte übrigens noch folgende Data:

1.) Der zunächst zu betreibende Gradirbau war 1500 Fus lang.

2.) Hatte zwei Wände.

3.) Die ganze Höhe vom Boden des Baßins bis an den obern Rand des Trogs betrug im Mittel etwa 24 Fus. Weil nämlich die Baßins eines Gradirhauses nach der Gegend hin, wo die Pumpen aufgestellt werden, einen gewissen Fall bekommen, damit die Saugröhren beständig mit ihrer untern Oefnung noch unter Wasser stehen, so ist die nur erwähnte Höhe verschieden, und kann im ietzigen Fall etwa von 23 bis zu 25 Fus steigen.

4.) Es sollte darin 1 löthige Soole siedbar gemacht werden.

5.) Die Höhe, auf welche die Brunnensoole aufgefördert werden mußte, betrug bis in das untere Baßin etwa 65. F.

6.) Der Brunnen selbst war etwa noch 1600 Fus von dem Theil des Gradirbaus, in welchen die Brunnensoole kommt, entfernt.

7.) das Gefälle des Aufschlagwassers $h = 23$ Fus.

Ueber diese letzte Angabe, die von dem durchs Abwägen gefundene Gefälle von 34 Fus so sehr abweicht, muß ich mich etwas näher erklären.

Das Instrument, dessen ich mich zur Abwägung bediente, war ein messingener halber Bogen, der auf einem zwischen zwoen Stangen ausgespannten Faden angehängt wurde. Aus dem Mittelpunkt dieses halben Bogens hing ein

*) Da ich dieses schreibe, sind die genannten 3 nebst noch einer von einem andern Bächelchen betriebenen 4ten Mühle, wirklich schon erkauft, mit der Arbeit selbst aber noch kein Anfang gemacht worden, welches aber nächstens geschehen wird.

ein Faden mit einer Bleikugel über den Bogen herab; der Bogen hatte in seiner Mitte einen Einschnitt, der den Bogen also in zweene Quadranten abtheilte; wenn nun der Bogen an dem ausgespannten Faden ED (fig. 22. im Buch) mit den beiden Häkgen E, F, aufgehenkt wurde, so mußte an einer der beiden Stangen, woran der Faden angelegt war, der Faden so lange auf- oder niedergelassen werden, bis der Faden mit der Kugel P in den Einschnitt bei H fiele, da dann der Faden ED nothwendig eine horizontale Lage bekam, und die Menge von Zollen, um die der Faden an der einen Stange höher als an der andern war, zeigte, um wieviel der Boden auf dieser Strecke ED gestiegen oder gefallen war. Es versteht sich übrigens, daß der Bogen allemal in der Mitte des Fadens ED, die man sich deswegen mit einem im Faden gemachten Knopf bemerkt, aufgehenkt werden muß. Ich habe dieses Instrument nur für Solche, die vielleicht noch nie einer solchen Abwägung beigewohnt haben, ganz kurz beschreiben wollen. Es ist übrigens sehr bekannt und vom gewöhnlichen Gradbogen der Markscheider nur darin verschieden, daß bei letzterem der Faden beständig an beide Stangen in gleicher Höhe vom Boden angelegt wird, da dann, wenn der Boden selbst schief liegt, auch der Faden ED eine schiefe Lage bekommt, und der Faden mit der Kugel KP von der Linie KH in die KO abweicht. Der Markscheider zählt nun bei diesem Verfahren nur die Anzahl Grade, die auf dem Bogen HO bemerkt stehen, addirt am Ende der ganzen Abwägung die bei allen Stationen bemerkte Grade zusammen, und berechnet daraus, um wieviel man bei allen Stationen zusammen gestiegen oder gefallen ist — gewöhnlich vermittelst schon berechneter Tabellen, die ihm die Mühe ersparen, sich selbst mehr eigene Einsichten zu erwerben. Beide Instrumente verstatten beim Abwägen gleiche Schärfe, und ich halte ersteres für bequemer.

Nach dieser kurzen Beschreibung erinnere ich nun, daß es an dem Faden KP gar nicht mehr merklich ist, wenn man bei einer Länge des Fadens ED von 30 Fusen, den Faden um einen $\frac{1}{8}$ Zoll an der einen Stange auf- oder niederrückt. Es kann also sein, daß man den Faden während dem Abwägen um $\frac{1}{8}$ Zoll niederrückt, wo man ihn wirklich noch um $\frac{1}{8}$ Zoll hätte hinaufrücken sollen, und so fällt in die Augen, daß man bei ieder Station von 30 Fus wirklich um $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ Zoll unsicher bleibt. Nun hatte man bei obigem Abwägen etwa 340 solche Stationen, und man ist also bei dem gefundenen Gefälle von 34 Fus um $340 \cdot \frac{1}{4} = 85$ Zoll oder um 7 F. unsicher, so daß man mit Zuverläßigkeit auf mehr nicht als $34 - 7 = 27$ F. zählen kann. Nun muß zwischen dem untersten Punkt des Rades und der Räusche noch einige Entfernung bleiben, die Räusche selbst muß einiges Gefälle haben und beim Ausgraben selbst gehn

wieder einige Fuse verlohren, so daß man dieses alles erwogen über 23 Fus nicht mit völliger Sicherheit vom gefundenen Gefälle für den Werth von h annehmen darf. *)

Ich

*) Es ist so leicht nicht, einen Graben von 10000 Fus lang gehörig anzulegen, daß das Wasser darin ungehindert fortlaufen kann, und daß man doch übrigens vom Gefälle so wenig als möglich verliehre. Wenn z. B. der Boden des neuen Grabens auf 100 Fus nur einen Zoll Fall bekäme, so verlöhre man auf die Strecke von 10000 F. schon 100 Zoll = 8 $\frac{1}{3}$ Fus vom Gefälle und behielte von denen 23 nur kaum noch 15 Fus. Ich halte daher folgendes Verfahren in der Ausübung für sehr dienlich:

Man muß vor allen Dingen bestimmen, wieviel Wasser der Bach iede Sec. auswirft und wieviel man davon höchstens in den neuen Graben verlangt, so daß der Ueberschuß durch ein angelegtes Wehr in den alten Graben abgewiesen wird. Diese höchste Wassermenge soll Z heisen. Um nun recht sicher in Ansehung des Abflusses zu gehen, daß man nämlich diese Wassermenge gewiß erhalten könne, nehme man an, die Geschwindigkeit, die das Wasser vor dem Eintritt in den neuen Graben hat, gehe völlig verlohren, und schiese also darin nur mit der Geschwindigkeit ab, mit der es schon wegen der Höhe, auf die es in diesem übrigen horizontal angelegten Graben steht abfliesen muß. Giebt man nun dem neuen Graben die Breite x und die Tiefe a, so ist, wenn soviel Wasser zufliesen soll, daß dieser Graben beständig auf die Höhe a mit Wasser gefüllt ist, die iede Sec. zufliesende Wassermenge $= \frac{2}{3} \cdot x \cdot a \cdot 2\sqrt{ga}$ (K. §. 193. II.). Nun soll diese Wassermenge $= Z$ sein, also hat man

$$Z = \frac{2}{3} \cdot xa \cdot 2\sqrt{ga}$$

und

$$x = \frac{3}{4} Z : a\sqrt{ga}$$

die Folge wird nun zeigen, daß man hier

$$Z = 20 \text{ Cub. F.}$$

setzen kann, das giebt $\frac{3}{4} Z = 15$ C. F. und

$$x = \frac{15}{a\sqrt{ga}}$$

Nimmt man also die Höhe des am Ende des Grabens auf das Rad fallenden Wasserstrahls d. i. die Tiefe des im neuen Graben fortfliesenden Wassers = 1 Fus = a so giebt sich $x = \frac{15}{1 \cdot \sqrt{15,625} \cdot 1}$ sehr nahe $= \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$ Fus. Und wenn man das Ufer, wie räthlich ist, durchaus ein paar Fuse über den Wasserspiegel hervorragen lassen will, so erhellet hieraus soviel, daß man seiner Sache völlig gewiß ist, wenn man den neuen Graben 3 Fus tief, 4 Fus breit und übrigens horizontal anlegt. Ihn nun wirklich horizontal anzulegen, würde ich so verfahren. Ich würde allemal von hundert zu hundert Fuen ein Stück abwägen, so daß solches so weit es die Genauigkeit des vorigen Instruments verstattete, horizontal wäre, und so oft

ein

Ich werde nun zeigen, wie sich aus diesen Datis die sämmtlich erfoderliche Bewegungskräfte bestimmen lassen und der ganze Gradirbau übrigens gehörig einzurichten sei.

ein solches 100 F. langes Stück ausgegraben wäre, müßte der Boden noch einmal abgebleit werden. Der neue Graben dürfte nicht unmittelbar am alten angefangen werden, weil sonsten das Wasser gleich hinten drein schösse und die Arbeiter verhinderte. Man müßte also in einiger Entfernung von etwa 10 Fusen erst den neuen Graben anfangen, so daß zwischen dem alten und neuen ein etwa 10 Fus breiter Damm stehen bleiben müßte. Sobald nun das erste 100 F. lange Stück ausgegraben wäre, müßte man in lenen Damm einschneiden und so das Wasser aus dem Bach in den neuen Graben laufen lassen. Dieses müßte allmählich geschehen und man müßte den gemachten Einschnitt mit einem Schutzbret gleich verwahren können. Auf solche Art könnte man bald wahrnehmen, ob sich das Wasser über dem 100 F. langen Boden gleich hoch stellte. Fände man, daß es am Ende um Etwas tiefer oder nicht so tief als oben beim Anfang stünde, welches doch nicht leicht über einen Zoll betragen kann, wenn das Abbleien mit gehörlger Sorgfalt geschehen ist, so fängt man gleich bei dem folgenden 100 F. langen Stück an, den Boden entweder wieder um soviel zu erhöhen oder um soviel zu vertiefen. Man läßt aber zwischen diesem zweiten Stück und dem ersten wieder einen kleinen etwa nur 4 Fus breiten Damm stehen, daß das im ersten stehende Wasser nicht hinderlich fallen kann. Ist nun dieses zweite Stück wieder so genau als möglich horizontal ausgegraben, so macht man wieder in den zwischen diesem und dem ersten Stück stehen gebliebenen zweiten Damm einen Einschnitt, und läßt nun das Wasser aus dem ersten Stück in das zweite treten, bis es den ganzen Boden bedeckt, da man dann wieder die Tiefe des Wassers am Ende dieses zweiten Stücks sowohl als am Anfang des ersten Stücks beim ersten Damm mißt. Belde Tiefen müssen gleich sein, und wenn sie es nicht sind, kann ihr Unterschied wieder nicht über einen Zoll betragen, um den der Boden des neuen Grabens am Ende des zweiten Stücks entweder zu hoch oder zu tief liegt. Man läßt nun wieder ein Stück Damm, als den dritten stehen, und fängt hinter solchem das dritte Stück an, und zwar gleich so, daß der Boden desselben entweder um soviel tiefer oder um soviel höher zu liegen kommt, als der Fehler am Ende des zweiten Stücks erfodert. Ist nun dieses dritte Stück wieder sorgfältigst horizontal ausgegraben, so wird wieder in den dritten Damm ein Einschnitt gemacht, wodurch das Wasser aus dem zweiten Stück in das dritte läuft; nun mißt man wieder die Tiefe des Wassers am Ende dieses dritten Stücks nebst der am Anfang des ersten; wegen der Einschnitte in dem zweiten und dritten Damm bekommt nämlich das Wasser in allen drei Stücken eine einzige horizontale Oberfläche und weil der Boden horizontal werden soll, so muß nun wieder die Tiefe des Wassers am Anfang des ersten Stücks, der Tiefe des Wassers am Ende des dritten Stücks gleich sein. Wenigstens können beide Tiefen wieder nicht viel von einander abweichen. Man läßt also nun wieder einen kleinen Damm stehen fängt das vierte Stück an, und ersetzt dabei wieder den vorigen Fehler und so fährt man bei allen folgenden Stücken fort. Man kann auf solche Art versichert sein, daß man den Boden gewiß höchstens bis auf einige Zolle bis ans Ende, wenn er auch

Weil der Gradirbau wegen seiner beträchtlichen Länge in mehrere Baßins abgetheilt sein muß, wo iedes folgende immer schwerere Soole enthält als das vorhergehende, so muß man vor Berechnung und Anordnung der Pumpenkünste, erst die Anzahl der Abtheilungen des ganzes Baues bestimmen, und das führt mich zuvor auf folgende Aufgabe.

§. 353.

Einen Gradirbau, dessen Länge 1500 Fus ist, und worauf man einlöthige Soole siedbar machen will, so abzutheilen, daß iede Abtheilung ihre erforderliche Länge bekommt.

Aufl. Ich will setzen, die einlöthige Soole soll im ersten Baßin 2löthig werden, also 2 löthig ins zweite Baßin kommen, so kommt es hier eigentlich auf die Aufg. §. 28. I. Pr. des Beitr. zur Salzwerksk. an, deren richtigere Auflösung ich in dem schon angeführten letzten Band derer Actor. Acad. elector. Erfurd. gegeben habe, woraus ich folgendes Verfahren entlehne. Wenn die Soole in der Mitte eines ieden Baßins 8 Zoll tief angenommen wird (welche Voraussetzung für sich gleichgültig ist, wenn nur einerlei Tiefe für alle Baßins beibehalten wird), so müssen, wenn aus der νlöthigen Soole die μlöthige werden soll, $8'' \cdot \left(1 - \frac{N}{M}\right)$ abdünsten, wie aus dem angef. Beitr. zur Aufn. der Salzwerksk. zu ersehen ist. Nun ist $\nu = 1$, $\mu = 2$, man hat also aus der obigen Tafel

$$N = 0{,}6847 \text{ ℔}$$
$$\text{und } M = 1{,}3790$$
$$\text{mithin } \frac{N}{M} = 0{,}497$$

das giebt

$$8'' \cdot \left(1 - \frac{N}{M}\right) = 8 \cdot 0{,}503 = 4{,}024$$

Nun

20000 und mehrere Fuse weit fortgesetzt würde, horizontal behält und nichts vom Gefälle verliehrt. Allenfalls kann man auch gleich anfangs den Boden des neuen Grabens um etliche Fuse tiefer anfangen als den Boden im alten Graben, damit sich das Wasser mit desto grösserer Gewalt und Geschwindigkeit in dem neuen stürzt, und man allenfalls, wenn man es nöthig findet, eine größere Wassermenge in den neuen Graben lassen kann, wodurch man dann einige Fuse vom Gefälle verliehrt, um die das Rad niedriger werden muß.

Digitized by Google

Nun wird die 2löthige Soole ohngefähr 4löthig, indeß daß die 1löthige Soole 2löthig wird; man ſuche alſo nun

$$y = 4{,}024 \cdot \sqrt{\left(\frac{50 - (2 + 4)}{50 - (1 + 2)}\right)}$$

$$= 4{,}024 \cdot 0{,}960$$

$$= 3{,}863$$

mithin $\frac{8}{8 - 3{,}863} \cdot 1{,}379 = 1{,}938 \cdot 1{,}379$

$= 2{,}665$ ℔.

Aus obiger Tafel ſuche man die zu dieſer Salzmenge gehörige Löthigkeit, welche zwiſchen 3 und 4 fällt; es iſt nämlich

$$(2{,}7934 - 2{,}0828) : (4 - 3) = (2{,}7934 - 2{,}665) : x$$

oder $0{,}71 : 1 = 0{,}128 : x$

alſo $x = \frac{128}{710} = 0{,}1802$

Demnach iſt die Löthigkeit, welche zu der Salzmenge 2,665 ℔ gehört $= 4 - 0{,}18 = 3{,}82$ und die 2löthige Soole wird alſo 3,82löthig, während daß die 1löthige 2löthig wird.

Um nun zu finden, wieviel löthig die 3,82löthige wird, bis die 1löthige 2löthig geworden, ſetze man, ſie werde ohngefähr $2 \cdot 3{,}82 = 7{,}64$ löthig, wie eine leichte Ueberlegung giebt, und ſuche nun wie zuvor

$$y = 4{,}024 \cdot \sqrt{\left(\frac{50 - (3{,}82 + 7{,}64)}{50 - (1 + 2)}\right)}$$

$$= 4{,}024 \cdot 0{,}905 = 3{,}6417$$

und $\frac{8}{8 - 3{,}641} \cdot 2{,}665 = 4{,}877$ ℔.

Nun iſt wieder wie vorhin aus der Tafel

$$(4{,}9932 - 4{,}2513) : (7 - 6) = (4{,}9932 - 4{,}877) : x$$

oder $0{,}742 : 1 = 0{,}116 : x$

alſo $x = 0{,}156$

und die zur Salzmenge 4 877 ℔ gehörige Löthigkeit $= 7 - 0{,}156 = 6{,}844$ welches die geſuchte Löthigkeit iſt.

Eben-

Ebenso giebt sich, wieviel löthig die 6,84 löthige Soole wird, bis die 1 löthige 2löthig ist. Sie wird nämlich ohngefähr $2 \cdot 684 = 13,68$ löthig und es wird

$$y = 4,024 \cdot \sqrt{\left(\frac{50 - (6,84 + 13,68)}{50 - (1 + 2)}\right)} = 3,183$$

und $\frac{8}{8 - 3,183} \cdot 4,877 = 8,096$ ℔, welches sehr nahe zur 11löthigen Soole gehört. So könnte man also den Bau in 5 Abtheilungen oder 5 an einander liegende Baßins abtheilen, und

die erste bekäme die Soole 1 löthig
zwote — — — 2,00-
dritte — — — 3,82-
vierte — — — 6,84-
fünfte — — — 11,00-

Zu mehrerer Bequemlichkeit in der Ausübung nehme man aber nun die den gefundenen Zahlen nahe kommende Voraussetzung an:

Die erste Abtheilung bekommt die Soole 1 löthig
zwote — — — 2 —
dritte — — — 4 —
vierte — — — 7 —
fünfte — — — 11 —

Wenn man die Löthigkeit mit der die Soole in iedes folgende Baßin kommen soll, willkührlich wie (I. Pr. des Beitr. §. 27.) annimmt, so kann es sich gar leicht zutragen, daß aus einem Baßin in das folgende übergepumpt wird, wenn aus solchen noch nicht in das weiter folgende übergezogen werden kann, und daß also auf solche Art öfters mit dem Ueberziehen der Soole aus einem Baßin in das andere zur Zeit, da solches nöthig wäre, wird eingehalten werden müssen. Dieser nachtheiligen Folge entgeht man, wenn man die Löthigkeit, mit der die Soole in iedes Baßin kommen soll, auf die hier geschehene Art bestimmt. Verfährt man nun übrigens völlig nach (I. Pr. §. 27.) so daß man dort

$$N = 0{,}6847$$
$$\gamma = 1{,}3790$$
$$\delta = 2{,}7934$$
$$\varepsilon = 4{,}9932$$
$$\eta = 8{,}0634$$

ſetzt, ſo giebt ſich dort

$$S = 1 + \frac{6847}{13790} + \frac{6847}{27934} + \frac{6847}{49932} + \frac{6847}{80634}$$
$$= 1 + 0{,}4965 + 0{,}2450 + 0{,}1371 + 0{,}0849$$
$$= 1{,}9635$$

alſo

die Länge des erſten Baßins	=	764,0 Fus.
zweiten —	=	379,3
dritten —	=	187,2
vierten —	=	104,7
fünften —	=	64,8
Summe	=	1500 F.

Ich bemerke nur noch, daß der Grad der Löthigkeit, den die Soole im letzten Baßin erreichen ſoll, eigentlich der vortheilhafteſte Grad der Löthigkeit der zu verſiedenden Soole ſein muß, wovon ich in der IIten Pr. des Beitr. und noch richtiger in den angef. Act. Acad. Erfurd. gehandelt habe. Wäre dieſer Grad geringer als 16, ſo dürfte man nur das letzte Baßin etwas tiefer als die übrigen machen und dann allenfalls leichtere Soole hinzulaſſen. Kürzer aber kann man in der Ausübung ſo verfahren: wenn z. B. in dem letzten Baßin die Siedſoole nur 14löthig werden ſoll, ſo iſt $16 - 14 = 2 = \frac{1}{8} \cdot 16$, und man darf alſo nun ſtatt der Zahlen

nur	$2 - \frac{2}{8}$	$4 - \frac{4}{8}$	$7 - \frac{7}{8}$	$11 - \frac{11}{8}$	$16 - \frac{16}{8}$
oder	$1\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{8}$	$9\frac{5}{8}$	14

ſetzen und ſo in ähnlichen Fällen. Sollte aber die Soole im letzten Baßin höher als 16 z. B. 18 löthig werden, ſo iſt $18 - 16 = 2 = \frac{1}{8} \cdot 16$ und nun darf man ſtatt der Zahlen

	2	4	7	11	16	
nur	$2+\frac{2}{8}$	$4+\frac{4}{8}$	$7+\frac{7}{8}$	$11+\frac{11}{8}$	$16+\frac{16}{8}$	
oder	$2\frac{1}{4}$	$4\frac{1}{2}$	$7\frac{7}{8}$	$12\frac{3}{8}$	18	setzen.

Solchergestalt bleibt das Verhältnis der Löthigkeit unverändert und daher auch die Länge der einzelen Abtheilungen oder Baßins, wenn sich gleich die vortheilhafteste Löthigkeit der Siedsoole im letzten Baßin nach den verschiedenen Jahreszeiten wirklich abändert. Die einzige von dieser Abänderung auch auf die Bewegungskräfte sich erstreckende Folge, ist die damit verbundene Abänderung der specif. Schwere der in iedem Baßin befindlichen Soole. Zum Glück hat aber diese Abänderung der spec. Schwere auf die Bewegungskräfte keinen Einfluß, der für die Ausübung nur merklich wäre, und man kann also ohne allen Nachtheil die ganze Rechnung so führen, wie für den Grad der Löthigkeit, den die Soole im letzten Baßin in den heisen Sommermonathen erreichen soll.

§. 354.

Nach dieser kurzen Untersuchung läßt sich nun erst die Frage (§. 352.) gehörig beantworten. Man hat nicht nöthig, die Bewegungskräfte für iede Abtheilung besonders zu berechnen, wie ich in der vormaligen Abhandlung gethan habe, sondern nimmt die Berechnung nach der 91ten Formel gleich für den ganzen Bau vor, und ordnet am Ende das Pumpenwerk für iedes Baßin noch besonders an. Der ganze Bau bekommt wieder lauter Saugwerke, und die Rechnung läßt sich in folgender Ordnung führen.

I. Man bestimme zuerst nach (§. 295. d. Erl.) die Höhe des Kolbenzugs. Ich setze nämlich den Halbmesser von des Rades Theilriß $r = 11$ Fus, das giebt den Kolbenhub $= \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$ F. und die Höhe der Kurbel $q = 1\frac{3}{8}$ F. $= 16{,}5$ Zoll.

II. Die Dicke der Wellzapfen läßt sich wegen der erstaunenden Last, die dieses Rad zu wältigen bekommt, nicht unter einen halben Fus annehmen; das giebt

$$\varrho = 3 \text{ Zoll} = \tfrac{1}{4} \text{ F.}$$

$$\text{also} \quad \frac{q + \frac{1}{2}\varrho}{q} = \frac{17{,}5}{16{,}5} = 1{,}06$$

III. Hier wird sich n nicht wohl unter 2,5 F. nehmen lassen; macht man übrigens des Rades Schaufeln lang genug, etwa $= 6$ Fuß zwischen beiden Kränzen,

Kränzen, so kann man ohne weitere Berechnung annehmen, daß s nicht über 1,5 Fus betragen wird; man hat also

$$\zeta = h - u - s = 23 - 2{,}5 - 1{,}5 = 19 \text{ F.}$$

IV. Weil hier $b = 2{,}75$ F. so ist der Weg eines ganzen Kolbenspiels $= 2b = 5{,}5$ F.

also $$t = \frac{5{,}5}{\frac{2}{3}} = \frac{16{,}5}{2} = 8{,}25 \text{ Sec.}$$

V. Und nun erhält man aus der 70ten Formel

$$\beta = 19 - \frac{8{,}25 \cdot \frac{1}{4}}{3 \cdot 11}\sqrt{15{,}625 \cdot 2{,}5}$$
$$= 18{,}61$$

folglich aus no. II.

$$\frac{q + \frac{1}{3}\varrho}{q\beta} = \frac{1{,}06}{18{,}61} = 0{,}056$$

VI. Zu Bestimmung der Grösse α aus der 69ten Formel, setzt man

$$f + b = 24 \text{ Fus}$$

welches nach der obigen Tafel (§. 336. d. Erl.) bei allen Soolen angeht, das giebt nun, weil hier l und f gleich gesetzt werden können

$$f = l = 24 - 2{,}75 = 21{,}25 \text{ Fus}$$

aber, weil das Druckwerk wegfällt,

$$g' = 0$$

Um ν zu finden, muß man $\frac{d}{D}$ nach der 12ten Formel nehmen und dann hat man nach (§. 264. d. Erl. no. III.) $w = \frac{2f}{b} = \frac{42{,}5}{2{,}75} = 15{,}4$

also $$\nu = 1 + \frac{1}{15{,}4} = 1{,}064$$

Die Bestimmung von $\frac{d}{D}$ will ich bis ans Ende verspahren.

Man hat also aus der 69ten Formel

$$\alpha = \gamma \cdot 1{,}064 \cdot 24$$
$$= 25{,}53 \cdot \gamma$$

VII. Aus (§. 306. d. Erl. am Ende) ist

$$\delta = 13{,}5 \text{ Zoll} = 1{,}125 \text{ F.}$$

$$\sqrt{u\delta} = \sqrt{2{,}5 \cdot 1{,}125} = 1{,}677$$

$$\sqrt{\frac{\delta}{u}} = \sqrt{\frac{1{,}125}{2{,}5}} = 0{,}67$$

und $\sqrt{gu} = 6{,}25$

VIII. Nach (§. 306. d. Erl.) setze ich

$$k = \tfrac{1}{2}$$

IX. Des Rades Gewicht setze ich = dem Gewiche von 60 Cub. F. Wasser also

$$p = 60$$

X. Nun ist noch ψ zu bestimmen übrig, welches eine sorgfältige Ueberlegung erfodert.

Für den ganzen 1500 Fus langen Bau, hat man aus der 89ten Formel

$M = 15 \cdot (0{,}074 + 0{,}030) = 0{,}104 \cdot 15$ C. F. $= 1{,}56$ C. F.

für $T = 1$ Sec. Bedient man sich also neun Paar Pumpen, so giebt die 30te Formel den Durchmesser des Stiefels a oder

$$D = \sqrt{\left(\frac{1{,}56 \cdot 8{,}25}{\frac{1}{2} \cdot 3{,}141 \cdot 9 \cdot 2{,}75}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{2{,}983}$$

$$= 0{,}575 \text{ F.}$$

$$= 6{,}9 \text{ Zoll.}$$

Der Bau erfoderte also sehr nahe achtzehn 7zöllige Stiefel. Nehme ich an, daß sich die Friktion an iedem dieser Kolben der Bewegung der Warze wie das Gewicht von $\frac{1}{6}$ C. F. Wasser widersetze, welches gewiß das äuserste ist, so ist die Kraft, die mit der Friktion sämmtlicher 18 Kolben d. i. mit $18 \cdot \frac{1}{6}$ oder 3 C. F. am Umfang des Rades das Gleichgewicht hält, $= \frac{q}{r} \cdot 3 =$

$\frac{1\frac{1}{6}}{11} \cdot 3 = \frac{1}{11}$ C. F. also beträgt

dieser Theil von $\psi = \frac{1}{11}$ C. F.

Der

Der übrige Theil von ψ betrift die Reibung an den Zapfen des Gestänges, die sich so bestimmen läßt:

Die ganze Länge des Gestänges vom Rade an bis und durch den ganzen Bau, setze ich = 800 Lachter; das Gewicht dieses ganzen Gestänges ruht auf etwa 30 Fus weit von einander gesetzten Kunstböcken *) deren Leit- und Tragärme aber gleichfalls mit zum Gewicht des ganzen Gestänges zu rechnen sind; in dieser Rüchsicht will ich das Gestänge 1600 Lachter lang annehmen, ohne dann weiter auf das Gewicht der Leit- und Tragärme zu sehen, da sich dann iede Lachter, die öftern Eisenbeschläge mit erwogen, so schwer als 1 C. F. Wasser setzen läßt. Die Stelle des Arms am Kunstbock, die den Stos unmittelbar vom Gestänge bekommt, ist nicht leicht unter 5 Fus vom Umdrehungspunkt entfernt; die Friktion am Zapfen des Arms aber, läßt sich bei einem gut gebauten Gestänge, von der Umdrehungsaxe noch nicht um $\frac{1}{4}$ Zoll entfernt annehmen; ich kann also mit aller Sicherheit annehmen, daß iene Entfernung 240 mal so groß als diese sei; demohngeachtet will ich nur 200 statt 240 setzen, und so ist die Last, welche die Friktion des Gestänges der Bewegung der Warze entgegensetzt $= \frac{1600}{200} = 8$ C. F. und weil die Höhe der Kurbel $= \frac{1}{8} r$, so ist die Kraft, die am Umfang des Rades angebracht, der Reibung des Gestänges das Gleichgewiche hält $= \frac{8}{8} = 1$ C. F. also

der andere Theil von $\psi = 1$ C. F.

und der ganze Werth ist demnach

$$\psi = \frac{1}{8} + 1 = 1{,}375$$

XI. Weil nun hier das obere Zeichen in der 91ten Formel gebraucht werden muß, und $0{,}074 + 0{,}030 = 0{,}104$ ist, so erhält man aus allen bisher berechneten Theilen, das iede Sec. zu Betreibung der Gradirung nöthige Aufschlagwasser auf 1500 Fus also für $\sigma = 15$

$$Z = 0{,}056 \cdot \Big(25{,}53 \cdot \gamma \cdot 0{,}104 \cdot 15 + \frac{60 \cdot \frac{1}{4}}{33} - \frac{\frac{1}{2} \cdot 25{,}53 \cdot \gamma \cdot 15}{19} \cdot 0{,}104 \cdot (2{,}5 + 1{,}125 - 3{,}354)\, 0{,}67 + 1{,}375] \cdot 12{,}5\Big)$$

$$= 1{,}280 + 2{,}097 \cdot \gamma$$

*) Von deren Bau s. meines Bruders Anleitung zum Salzwerksbau, die iezt noch unter der Presse ist.

XII. Weil der Bau Soole von fünferlei Löthigkeit, wovon die schwächste 1 löthig, die stärkste aber 16 löthig ist, so muß man für γ einen gewissen mittlern Werth suchen. Wie hierbei zu verfahren sei, soll in der Folge gewiesen werden; hier will ich für γ aus der obigen Tafel die specif. Schwere der 5 löthigen Soole nehmen, also $\gamma = 1{,}035$; die Sicherheit dieser Voraussetzung soll in der Folge gewiesen werden. Das giebt nun

$$2{,}097 \cdot 1{,}035 = 2{,}170$$

Demnach

$$\begin{aligned} Z &= 1{,}28 + 2{,}17 \\ &= 3{,}45 \text{ Cub. Fus.} \end{aligned}$$

In der vormaligen Abhandlung hat man nach Verbesserung eines Druckfehlers S. 95.

$$\begin{aligned} Z &= 3{,}504 + 0{,}032 \\ &= 3{,}536 \text{ C. F.} \end{aligned}$$

welches für die Verschiedenheit der geführten Rechnungen mit dem Gegenwärtigen gut genug übereinstimmt.

XIII. Um nun das Pumpenwerk gehörig anzuordnen, bestimme man den Werth von $\frac{d}{D}$, der für alle Pumpen auf dem ganzen Bau einerlei ist, weil er blos von l, t und g abhängt, die für alle diese Pumpen einerlei sind. Hierzu läßt sich nun die Tafel (§. 350. d. Erl) gebrauchen. Es ist nämlich hier $l = 21{,}25$ und $t = 8{,}25$; nun ist der Unterschied der zu $= 8$ und $t = 9$ gehörigen Werthe von $\frac{d}{D}$ für $l = 21$, $= 0{,}643 - 0{,}571$ $= 0{,}072$ also für $t = 8$ und $t = 8\frac{1}{4}$ bei $l = 21$, $\frac{d}{D} = 0{,}643 - \frac{0{,}072}{4} = 0{,}625$; nun ist ferner die Zahl 0,643 neben $l = 21$ von der gleich drunter stehenden 0,685 neben $l = 22$ um 0,015 verschieden, also kann man dem zu $t = 8\frac{1}{4}$ gehörigen Werth von $\frac{d}{D}$ bei l $21\frac{1}{4}$ um $\frac{0{,}015}{4} = 0{,}004$ gröſſer als bei $l = 21$, d. i. $= 0{,}625 + 0{,}004$ nehmen; also hat man

$$\frac{d}{D} = 0{,}629$$

Zur

Zur Probe suche man $\frac{d}{D}$ unmittelbar aus der 12ten Formel. Man erhält daraus

$$\frac{d}{D} = \frac{3,141 \cdot \sqrt{42,5}}{8,25\sqrt{15,625}}$$
$$= 0,6282$$

welches für die Ausübung mit der vorhin gefundenen Zahl einerlei ist.

Nun ist für 100 F. Gradirung M = 0,104 Form. no. 89. also

für das erste 764 Fus lange Baßin $M = 7,64 \cdot 0,104$
$= 0,7953$ C. F.

und daher

$$D = \sqrt{\frac{8,25 \cdot 0,7953}{\frac{1}{2}n \cdot 3,141 \cdot 2,75}}$$

wo man n = 3 seßen kann, das giebt

$D = 0,711$ Fus $=$ 8 Zoll $6\frac{1}{3}$ Lin.

und nun $d = \frac{d}{D} \cdot 0,711 = 0,628 \cdot 0,711$
$= 0,446$ F. $=$ 5 Zoll $4\frac{1}{3}$ Lin.

Für das zweite 379,3 Fus lange Baßin

$M = 3,793 \cdot 0,104 = 0,394$ C. F.

also für n = 2

$D = 0,615$ F. = 7 Z. 4,5 Lin.

und nun

$d = 0,628 \cdot 0,615$
$= 0,386$ Fus
$=$ 4 Z. 7,5 Lin.

Für

Für das dritte
Baßin $M = 1,872 \cdot 0,104$
$= 0,194$ C. F.

und $D = 0,61$ F. $= 7$ Z. $3,8$ Lin.

wo ich $n = 1$ genommen habe; also

$d = 0,628 \cdot 0,61 = 0,383$ F. $= 4,5$ Z.

Für das vierte Baßin

Für $n = 1$,

$D = 0,455$ F. $= 5$ Z. $5\frac{1}{2}$ Lin.

also $d = 0,628 \cdot 0,455$ F. $= 0,285$ F.
$= 3$ Z. 5 Lin.

Für das fünfte Baßin

Für $n = \frac{1}{2}$

$D = 0,507$ F. $= 6$ Z. 1 Lin.

also $d = 0,628 \cdot 0,507 = 0,318$ F.
$= 3$ Z. $9,8$ Lin.

XIV. Ich will nur noch hier die Bemerkung beifügen, daß die Zahlen, welche die Löthigkeit der Soole in den Baßins ausdrucken, 1, 2, 4, 7, 11 unter die Klasse der Trigonalzahlen gehören, und nach dieser Ordnung zu schliessen, wird die folgende Zahl 16 sein, so daß die Soole im 5ten Baßin 16löthig werden wird, bis sie im ersten 2 löthig wird.

XV. Das Resultat der bisherigen über die beiden Wände des Gradirbaus angestellten Berechnungen nun auf einmal zu übersehen, will ich die folgende Tafel hersetzen.

Der ganze 1500 Fus lange Gradirbau braucht zu seiner gehörigen Betreibung iede Secunde 3,45 Cub. Fus Aufschlagwasser und bekömmt

fünf Abtheilungen.

Die 1te gradirt 1löthige Soole bis zur 2löth. ist 764,0 F. lang hat 6 Pumpen { Der Durchm. der Stiefel ist 8 Z. 6½ Lin. der Durchm. der Saugröhren 5 Zoll 4½ Linie.

2te	—	2	—	4	—	379,3	—	4
3te	—	4	—	7	—	187,2	—	2
4te	—	7	—	11	—	104,7	—	2
5te	—	11	—	16	—	64,8	—	1

2te { Der Durchm. der St. ist 7 Z. 4½ Lin. d. Saugr. 4 Zoll 7½ Lin.

3te { Der Durchm der St. ist 7 Z. 3½ L. d. Saugr. 4 Z. 6 L.

4te { Der Durchm. der St. ist 5 Z. 5½ L. d. Saugr. 3 Z. 5 L.

5te { Der Durchm. des St. ist 4 Z. 1 L. der Saugr. 3 Z. 9½ L.

Der Kolbenhub ist 2¾ Fus hoch; man macht daher die Stiefel etwa 4 Fus hoch, so daß noch ¼ Fus über den Rand des über den Dornwänden befindlichen Trogs hervorragen, da dann ieder Stiefel soweit er über den Trog hervorragt einen Einschnitt bekommt, in welchen man die Kännel legt.

§. 355.

Es ist nun noch übrig, die Bewegungskräfte zu bestimmen, welche erfodert werden, um den ganzen Bau gehörig mit Brunnensoole zu versehen. Hierzu dienen die Sätze (§. 331. 335. 338. II. d. Erl.)

I. Weil nämlich ieder laufende Fus des Gradirbaus 1,4 Achtel zu 200 ℔ = 280 ℔ Salz liefert, so liefert der ganze 1500 F. lange Bau 1500 · 280 = 420000 ℔ Salz. Nun ist nach der obigen Tafel, die in 1 Cub. F. 1 löthiger Soole enthaltene Salzmenge = 0,6847 ℔, hiervon aber erhält man bei wirklicher Gradirung und Versiedung nur

$$0{,}88 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 0{,}6847 \text{ ℔ (§. 331; 335.)}$$
$$= 0{,}3012 \text{ ℔.}$$

und nun rechnet man nach der Regel de tri

$$0{,}3012 : 420000 = 1 : \left\{\begin{array}{l}\text{Anzahl C. Fuse Soole,}\\ \text{welche aus dem Brun-}\\ \text{nen auf den Bau kom-}\\ \text{men muß.}\end{array}\right.$$

das giebt die gesuchte Soolenmenge =

$$\frac{420000}{0{,}3012} = \frac{4200000000}{3012} = 1394422 \text{ C. F.}$$

Nun kann man nach (§. 342. d. Erl.) annehmen, diese Soolenmenge soll in 3100 Stunden also in 11160000 Sec. aufgefördert werden, und so ist also die iede Sec. aus dem Brunnen aufzufördernde Soolenmenge

$$= \frac{1394422}{11160000} = 0{,}125 \text{ oder } \tfrac{1}{8} \text{ C. F.}$$

II. Der Brunnen liegt noch um 1600 Fus weiter vom Rad entfernt als das Ende des Baus, und weil das vorige Rad auch zur Aufförderung dieser Brunnensoole gebraucht werden soll, so muß man das Gestänge soviel weiter fortführen, und es bleibt übrigens b = 2,75 und t = 8.25. Setzt man also n = 1, T = 1 Sec. und M = $\frac{1}{8}$ Cub. F. so giebt die 30te Formel den Durchmesser iedes Stiefels

$$D = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} \cdot 8,25}{1 \cdot 3,141 \cdot 1 \cdot 2,75 \cdot 1}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{8,25}{3,141 \cdot 2,75}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1,047}} = 0,436 \text{ F.}$$

$$= 5\tfrac{1}{4} \text{ Zoll.}$$

und es bleibt wie (§. 354. no. XIII. d. Erl.)

$$\frac{d}{D} = 0,628, \text{ also}$$

$$d = \frac{d}{D} \cdot 0,486 \text{ F.} = 0,628 \cdot 0,486$$

$$= 0,305 \text{ F.} = 3\tfrac{3}{4} \text{ Zoll.}$$

III. Man lege nun hier ein vereinbartes Saug- und Druckwerk an, wo das Druckwerk ein eigentliches ist. Nach den obigen Lehren muß man die Steigröhre so kurz als möglich machen, also wo möglich nicht vom Brunnen an bis zum Bau die 1600 Fus weit leiten, sondern auf einen andern in der Nähe befindlichen hohen Ort, wo von die Soole blos durch ihren natürlichen Fall, bis an den 1500 schuhigen Bau gelangen kann. Ich erinnere daher, daß etwa 400 Fus vom Brunnen ein hoher Gradirbau steht, in dessen obersten Trog man die Soole kann drucken lassen, und von wo an solche durch ihren natürlichen Fall in das Baßin des 1500 schuhigen Baues geleitet werden kann; die ganze Höhe von der untern Oefnung der Saugröhre bis an den obern Rand des erwähnten Trogs, beträgt etwa 70 Fus; und wenn man also für das Saugwerk

$$f + b = 24 \text{ Fus}$$

nimmt, so bleibt noch für das Druckwerk

$$e = 70 - 24 = 46 \text{ Fus}$$

IV. Nun verfahre man völlig nach (§. 267. d. Erl.), so hat man ausser dem erst genannten Werth von e

die Länge der Steigröhre $l = 400$ F.

b und t aber wie no. II. und $\frac{c}{a}$ nehme man = $\frac{1}{4}$. Es lassen sich nämlich bei dieser Höhe noch hölzerne Röhren gebrauchen und weil nach no. II. D = a noch nicht völlig 6 Zoll beträgt, so kann man auf die Strecke von 400 Fusen leicht noch Stämme aussuchen, die sich auf die Weite von $\frac{1}{4}$ a ausbohren lassen.

V. Weil hier von einem eigentlichen Druckwerk die Rede ist, so hat man (Form. no. 33.) $g' = e + \frac{1}{2}b = 46 + 1\frac{3}{8} = 47{,}375$ F.

VI. Und nun (Form. no. 27.)

$$w = \frac{47{,}375 \cdot 16 \cdot 8{,}25^2}{0{,}256 \cdot 400 \cdot 2{,}25 \cdot 25}$$

Es ist aber

log 47,375	=	1,6752741
log 16	=	1,2041200
log $8{,}25^2$	=	1,8329078
1.) Summe	=	4,7123019

Ferner

log 0,256 · 400 oder		
log 102,4	=	2,0102999
log 2,25	=	0,3521825
log 25	=	1,3979400
2.) Summe	=	3,7604224

die zwote Summe von der ersten abgezogen läßt

$$\log w = 0{,}9518795$$

$$\text{also } w = 8{,}95$$

$$\text{und } \lambda = 1 + \frac{1}{8{,}95} = 1{,}11$$

VII. Für das Saugwerk hat man nun aus (§. 267. no. V.)

$$y = 1 + \frac{1}{2f : b}$$

Es

Es ist aber aus no. III. $f = 21,25$ und aus no. II. $b = 2,75$ also $\frac{2f}{b} = \frac{42,5}{2,75} = 15,4$; mithin $\frac{1}{2f : b} = \frac{1}{15,4} = 0,065$ und daher

$$\nu = 1,065$$

VIII. Nun berechne man Z nach der 71ten Formel; man hat nämlich

$$M = \tfrac{1}{8}\ C.\ F. \quad \text{(no. I.)}$$

$$\alpha = 1,007 \cdot (1,065 \cdot 24 + 1,11 \cdot 47,375) \quad \text{(69te Form.)}$$
$$= 78,693$$

Ferner giebt sich hier ψ aus dem Werth von ψ in (354. no. X.) so: der erste Theil von ψ, der nämlich von der Reibung der Kolben herrührt, beträgt etwa $\frac{1}{12}$ vom ersten Theil des dortigen ψ

$$\text{also der eine Theil von } \psi = \tfrac{1}{12} \cdot \tfrac{3}{8}$$
$$= \tfrac{1}{32}\ C.\ F.$$

Der dortige zweite Theil, der vom 800 Lachter langen Gestänge herrührte, war = 1 Cub: F. Hier rührt dieser Theil vom etwa 1600 Fus oder etwa 230 Lachter langen Gestänge her, und läßt sich also $= \frac{230}{800} \cdot 1$ C. F. setzen d. i.

$$\text{der andere Theil} = 0,287\ C.\ F. \text{ also}$$
$$\text{das ganze } \psi = \tfrac{1}{32} + 0,287 = 0,318$$

Das Gewicht des Rades und die davon herrührende Friktion ist schon (§. 354.) in Anschlag gekommen, und darf daher hier nicht noch einmal mitgerechnet werden; man hat also hier

$$p = 0$$

Alle übrige Grössen der Form. 71. behalten ihre Werthe wie in 354. und das giebt nun

$$Z = 0,056 \cdot \left[78,693 \cdot \tfrac{1}{8} - \left(\frac{\frac{1}{2} \cdot 78,693 \cdot \frac{1}{8}}{19} \times \right.\right.$$
$$\left.\left.(2,5 + 1,125 - 3,354) \cdot 0,67 - 0,318\right) \cdot 12,5\right]$$
$$= 0,805\ \mathfrak{C}$$

Um demnach den ganzen Bau nicht nur gehörig in Absicht der Gradirung zu betreiben, sondern auch hinreichend mit Brunnensoole zu versehen, werden auf das vorbenannte Rad überhaupt iede Sec.

$$3{,}45 + 0{,}805 = 4{,}255 \text{ C. F.}$$

Aufschlagwasser erfodert.

§. 356.

Zur Vollständigkeit dieser Untersuchung gehört noch wegen (§. 354. no. XII.) folgende Aufgabe:

Es soll auf einer gewissen Anzahl Gradirung 1 löthige Soole bis zur 16löthigen gradirt werden; man sucht die mittlere specifische Schwere γ der durch die sämmtliche Gradirung ausgebreiteten Soole.

Aufl. Weil sich die auf den Gradirgebäuden von ieder Löthigkeit vorhandene Soolenmenge, so verhält, wie die Länge der Baßins, in welche man nach (§. 353.) sämmtliche Gradirung abzutheilen hätte, so schreibe man diese Längen, wie sie z. B. in 353 für 5 Abtheilungen sind berechnet worden, unter einander und die spec. Schwere, die zur größten Löthigkeit, welche die Soole in iedem Baßin erreicht, darneben, auf folgende Art:

	764	1,014
	379	1,027
	187	1,049
	104	1,078
	64	1,116
Summe	1498	

Nun verhält sich das Gewicht von der in iedem Baßin vorhandenen Soolenmenge, wie das Produkt aus solcher Soolenmenge oder aus der Länge des Baßins, das diese Soole enthält, in ihre spec. Schwere; man multiplicire also die Zahlen der einen Reihe mit den Zahlen der andern, so erhält man nachstehende Produkte:

	774,696
	389,233
	196,163
	112,112
	71,424
Summe	1543,628

Diese

Dieſe Summe mit der vorigen 1498 dividirt muß nun die geſuchte mittlere ſpec. Schwere geben; es iſt demnach

$$\gamma = \frac{1543,628}{1498} = 1,030$$

welches die zu $4\frac{3}{8}$ löthiger Soole gehörige ſpecifiſche Schwere iſt, wie man mit einer leichten Ueberlegung aus der obigen Tafel erſieht.

Es erhellet hieraus, daß ich in (354. XII.) γ der Sicherheit der Ausübung gemäß angenommen habe, und der gegenwärtige Werth ſtatt des dortigen gebraucht, ändert den Werth von Z nicht merklich ab.

Wie man in andern ähnlichen Fällen zu verfahren habe, wird Jeder hieraus von ſelbſt einſehen, und ich habe es deswegen für unnöthig gehalten, die Aufgabe in ihrer völligen Allgemeinheit vorzutragen.

§. 357.

Um nun zu unterſuchen, wieviel Waſſer der erwähnte Bach in ieder Secunde wirklich gebe, nahm ich im Jahr 1779. den 2ten October wo das Waſſer nach einem trockenen Sommer noch nicht ſeinen mittlern Stand wieder erreicht hatte, folgende Meſſung vor.

1.) Ich maß am Gerinne der dritten Mühle ſowohl die Tiefe als Breite des fortflieſenden Waſſers, und fand

die Breite = 4 Fus
Tiefe = $\frac{1}{4}$ F.
alſo den Querſchnitt = 5 Quadratfus.

Nun iſt die zu $\frac{1}{4}$ F. gehörige Geſchwindigkeit $= 2\sqrt{15,625 \cdot \frac{1}{4}} = \sqrt{78,125}$ $= 8,83$ F. alſo für iede Secunde

die geſuchte Waſſermenge $= \frac{2}{3} \cdot 833 \cdot 5 = 29,4$ C. Fus.

(ſ. K. 193. no. II.)

2.) An der oberſten Mühle nahm ich zur Prüfung eben dieſe Meſſung vor, und ich fand am Gerinne

die Breite des Waſſers = 4 F.
Tiefe — — = 1 F.
alſo den Querſchnitt — — = 4 Q. F.

Hier

Hier floß das Wehr über, und von diesem Ueberfall betrug etwa

die Breite 4 Fus
Tiefe $\frac{1}{2}$ F.
also der Querschn. 2 Q. F.

Die zur Tiefe des ersten Querschnitts gehörige Geschwindigkeit ist $2\sqrt{15,625} = 7,9$ also die zugehörige Wassermenge

$$= \frac{2}{3} \cdot 7,9 \cdot 4 = 21,07 \text{ C. F.}$$

die zur Tiefe des zweeten Querschnitts gehör. Geschw. ist $2\sqrt{15,625} \cdot \frac{1}{2} = 5,58$ also die zugehörige Wassermenge

$$= \frac{2}{3} \cdot 5,58 \cdot 2 = 7,44 \text{ C. F.}$$

Beides zusammen giebt

die gesuchte Wassermenge $= 21,07 + 7,44 = 28,5$ C. F.

welches mit der no. 1. gefundenen Zahl genau genug übereinstimmt, da die vorige Mühle den erwähnten Ueberfall zwar gleichfalls nicht bekommt, statt dessen aber durch einen von der Seite herzufliesenden kleinern Bach einen ganz ähnlichen Zufluß erhält. Da indessen das Wasser öfters so fällt, daß der erwähnte Ueberfall verschwindet, und der herzufliesende kleinere Bach in einer Secunde gewiß nicht mehr über etliche C. F. Wasser auswirft; so will ich zur völligen Sicherheit für die Ausübung die bei der obersten Mühle ohne den Ueberfall gefundenen 21 C. F. hier als die geringste Wassermenge, die der erwähnte Bach daselbst iede Secunde giebt, beibehalten.

3.) Ausserdem wurde noch eine Mühle von blosem Quellwasser getrieben, deren Wasser gleichfalls mit in den Hauptbach bei die gedachte erste Mühle geleitet werden konnte, daher man auch wirklich diese vierte Mühle noch mit zu den übrigen dreien angekauft hat.

Nach sorgfältig angestellter Messung fand ich hier im Gerinne

die Breite des Wassers $= 1\frac{2}{3}$ F.
Tiefe — — $= \frac{7}{12}$ F. *)

und die Rechnung giebt für iede Sec. die zugehörige Wassermenge

$$= \frac{2}{3} \cdot (2\sqrt{\tfrac{7}{12}} \cdot 15,625) \cdot (1\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{7}{12})$$

beinahe $= 4$ C. F.

Man

*) Nicht $\frac{5}{12}$ welches in der vormaligen Abhandlung ein Schreibfehler war, der daher auch die Wassermenge zu gering gab.

Man kann also nach dieser Messung und Berechnung mit völliger Sicherheit auf das anzulegende oberschlächtige Rad für iede Sec. 21 + 4 = 25 C. F. Aufschlagwasser rechnen.

Im Sommer 1780, den seine ausserordentliche von den ältesten Leuten noch nicht erlebte Dürre merkwürdig macht, da die meisten Bäche versieicherten und das Ausbleiben der Quellen manchem Dorf sogar das nöthige Wasser fürs Vieh versagte, wiederholte ich den 8ten August diese Messung. Ich fand sowohl bei der zwoten als dritten Mühle, die auch beide völlig einerlei Wasser haben, im Gerinne

die Breite = 4 F.
Tiefe = $\frac{1}{12}$ F.
also den Querschnitt = $\frac{1}{3}$ Q. F.
und die Wassermenge = $\frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{15,625} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3}$ = 23,72 C. F.

Das Wehr floß diesesmal nicht über, der hinzufliesende kleinere Bach mogte in einer Secunde nach meinem Augenmaas und ohngefähren Ueberschlag kaum 2 C. F. Wasser liefern, und so stimmte dieses mit der im Jahr 1779 vorgenommenen Messung sehr wohl überein, und da ich das Quellwasser an der vierten Mühle bei ietziger Messung unverändert = 4 Cub. F. fand, welches auch mit der Aussage des Müllers, daß er an seinem Wasser auch im heisesten Sommer keine Abnahme verspühre, übereintrift, so wird hierdurch folgender Satz hinreichend bestätigt:

Das sämmtliche Wasser, das man durch Ankaufung der erwähnten vier Mühlen gewonnen hat, beträgt iede Secunde beim niedrigsten Wasserstand 23 + 4 = 27 C. F.

Dieses mit dem Satz (355. am Ende) verglichen zeigt, daß das anzulegende Rad bei dem geringsten Wasserstand hinreichend ist, ein ganzes Salzwerk von wenigstens 10000 Fus zweiwändiger Gradirung, dergleichen der 1500 schuhige Bau ist, aufs vollkommenste zu betreiben.

Das Salzwerk, zu dessen Gebrauch dieses Rad angelegt werden soll, hat etwa 2500 Fus dergleichen Gradirung, und hat also sämmtliches Aufschlagwasser bei weiten nicht alle nöthig. Nun werden auf 100 Fus solche doppeltwändige Gradirung, wenn sie eben so, wie durch das Rad betrieben werden sollen, völlig drei Mann erfodert (unten §. 365.) also zu denen 2500 Fusen 75 Mann. Ausserdem zu Betreibung der Brunnen, wie sich aus (§. 355. am

Ende) beiläufig überschlagen läßt, etwa noch ein Sechstheil weiter also etwa noch 12 Mann, demnach zur Betreibung des ganzen Salzwerks

$$75 + 12 = 87 \text{ Mann.}$$

Bekommt Jeder täglich $\frac{1}{3}$ Fl. so beträgt solches täglich $\frac{87}{3}$ oder 29 Fl. Und wenn ich diese Ausgabe auf 240 Tage im Jahr berechne, so beläuft diese

jährliche Ausgabe auf $29 \cdot 240 = 6960$ Fl.

Zieht man die 960 Fl. von dieser Summe für Gradirer ab, die doch bei dem angelegten Rad auf den Gradirgebäuden zur Aufsicht gehalten werden müssen, so bleibt die jährliche Ausgabe an Arbeitsleute, die durch das Rad gespart wird, doch noch

$$= 6000 \text{ Fl.}$$

da hingegen die Zinsen von dem auf die Anlegung des Rades zu verwendenden Kapital sich gewiß nicht über 700 Fl. belaufen können.

Ich weis wohl, daß, wo es an Wasserrädern fehlt, gewöhnlich so wenige Gradirer angestellt werden, daß man statt der hier berechneten 6000 Fl. nicht über 2000 berechnen wird. Dadurch werden freilich dem Scheine nach 4000 erspahrt, aber auch kaum 4000 Achtel Salz bewirkt, wo, wenn die von mir genannte Anzahl von Gradirern angestellt würde, wenigstens 6000 Achtel bewirkt werden könnten, also durch die geringere Anzahl von Gradirern mehr verlohren als gewonnen wird.

Nach diesen vielerlei Berechnungen ist also die Frage im Anf. des 352ten §. völlig beantwortet, und man sieht, daß die Zinsen von dem auf die Anlegung dieses Rades zu verwendenden Kapital, wenn sich solches auch auf 10000 Thaler belaufen sollte, gegen den Vortheil, den ein solches Rad bringt, sehr unbeträchtlich werden.

§. 358.

Alle bisherige Rechnungen werden sich leicht auf 3wändige Gradirhäuser anwenden lassen. Man kann dabei annehmen, daß die Soole an der dritten Wand so stark herabtröpfelt wie an einer der untern; die aus dem obern Baßin in den über der dritten Wand liegenden Trog aufzuziehende Soolenmenge ist also nach der 89ten Formel

$$96.) = \frac{1}{2} \cdot (0{,}074 + 0{,}030) = 0{,}052 \text{ C. F.}$$

Aber auch die aus dem untern Baßin in das obere aufzuziehende Soolenmenge ist beim 3wändigen Bau $> 0{,}074 + 0{,}030$ oder $> 0{,}104$, weil die in dem obern Baßin alsdann erfoderliche Pumpen mehr Soole in den über der

3ten

3ten Wand befindlichen Trog ziehen, als aus diesem Trog wieder in das eben erwähnte Baßin herabtröpfelt, indem ein Theil Wasser im Tröpfeln wegen der Gradirung verlohren geht. Dieses wird sich etwas näher so bestimmen lassen.

Die auf den ganzen 1500 F. langen 2wändigen Bau erfoderliche Brunnensoole ist nach (355. I.) $= \frac{1}{8}$ C. F. also auf 100 F. $= \frac{1:8}{15} = 0{,}00833$ C. F. Wenn nun die 3te Wand so angelegt ist, daß man etwa von ihr $\frac{1}{4}$ soviel als von beiden untern zusammen erwarten kann, so wird der 3wändige Bau, auf 100 F. $\frac{0{,}00833}{4} = 0{,}00208$ C. F. Soole weiter brauchen als der 2wändige, demnach wäre die auf iede 100 Fuse dieses 3wändigen 1500 Fus langen Gradirbaus erfoderliche Brunnensoole

$$= 0{,}00833 + 0{,}00208$$
$$= 0{,}0104 \text{ C. F.}$$

diese hinzukommende 0,00208 C. F. Soole ist nun eigentlich die zur dritten Wand gehörige Brunnensoole, auf 100 F. gerechnet, welches auf die ganze 1500 F. lange 3te Wand $15 \cdot 0{,}00208 = 0{,}03120$ C. F. iede Sec. beträgt. Demnach muß das obere Baßin an Soole iede Sec. auf 100 Fuse bekommen

1. 0,104 C. F. zur Betreibung der beiden untern Wände.
2. 0,00208 C. F. zur Betreibung der 3ten Wand

also überhaupt 0,10608 C. F.

Man kann daher für die Ausübung annehmen, die auf 100 laufende F. dreiwändiger Gradirung iede Sec. aus dem untern Baßin in das obere, das unter der dritten Dornwand liegt, aufzuziehende Soolenmenge sei

97.) $= 0{,}1061$ C. F.

Und nun lassen sich alle bisherige Rechnungen auch auf dreiwändige Gradirhäuser anwenden.

§. 359.

Aus dem bestimmten Aufschlagwasser oder überhaupt aus den bestimmten Bewegungskräften, die Länge der Gradirung x zu finden, die sich damit nicht nur für sich gehörig betreiben, sondern auch über das mit Brunnensoole gehörig versehen läßt.

Aufl. 1. Für zweiwändige Gradirung. Wenn man in den Formeln no. 93 - 95. den Werth von ϑ subſtituirt, ſo erhält man ſowohl für unterſchlächtige als oberſchlächtige und Tritträder Formeln, deren iede ſich allemal auf dieſe Form bringen läßt

$$M = \frac{\chi}{\gamma'' \cdot (\nu \cdot (f'' + b) + \lambda \cdot a'')}$$

wo ich nur γ'', f'', a'' ſtatt γ, f, g' in der 69ten Formel geſetzt habe, der Werth von M aber ſich auf die in ieder Sec. aus dem Baßin in den Trog aufzuziehende Soolenmenge bezieht. Dieſen Werth von M würde man nun alsdann gebrauchen können, wenn die Bewegungskräfte blos zur Aufziehung der Soole aus dem Baßin in den Trog angewandt würden; ſie ſollen aber hier zugleich gebraucht werden, Brunnenſoole auf den Gradirbau zu verſchaffen; die aus dem Baßin aufzuziehende Soolenmenge kann daher nicht = M ſein. Ich will ſie = M' ſetzen. Iſt nun die iede Sec. auf den zu ſuchenden Bau erfoderliche Brunnenſoolenmenge = y, ſo wird ſich y ſo beſtimmen laſſen:

Die aus dem Baßin in den Trog auf 100 Fus zuziehende Soolenmenge iſt bei einem zweiwändigen Bau M = 0,104 C. F. und wenn darauf 1 löthige Soole bis zur 16löthigen gradirt werden ſoll, ſo iſt die auf 100 Fus nöthige Brunnenſoole nach (355. I.) $= \frac{1 : 8}{15} = 0{,}00833$ C. F. Soll demnach 1 löthige Soole auf dem Bau bis zur 16löthigen gradirt werden, ſo hat man

$$y = \frac{0{,}0083}{0{,}104} \cdot M'$$

oder 97.) $y = 0{,}0798 \cdot M'$

oder wenn überhaupt αlöthige Soole bis zur βlöthigen gradirt werden ſoll, ſo hat man aus der 86ten Formel allgemein

$$y = \frac{\left(\frac{0{,}00068 \cdot B \cdot \sqrt{(50 - (\beta + \alpha))}}{(B - A) \cdot \left(1 - \frac{B - A}{1{,}88 \cdot B}\right)}\right)}{0{,}104} \cdot M'$$

oder

98.) $$y = \frac{0{,}00654 \cdot B \cdot \sqrt{(50 - (\beta + \alpha))}}{(B - A) \cdot \left(1 - \frac{B - A}{1{,}88 \cdot B}\right)} \cdot M'$$

Nennt

Nennt man nun γ, f, a für die Brunnenſoole, was ich für die Betreibung des Gradirbaus γ'', f'', a'' genannt habe, ſo hat man

$$\gamma'' \cdot (\nu \cdot (f'' + b) + \lambda \cdot a'') \cdot M = \gamma'' \cdot (\nu \cdot (f'' + b) + \lambda \cdot a'') \cdot M' + \gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot a) \cdot y$$

Seßt man alſo weiter

$$\frac{0{,}00654 \cdot B \cdot \sqrt{(50 - (\beta + \alpha))}}{(B - A) \cdot \left(1 - \frac{B - A}{1{,}88 \cdot B}\right)} = \delta$$

ſo hat man wegen der 98ten Formel

$$\gamma'' \cdot (\nu \cdot (f'' + b) + \lambda \cdot a'') \cdot M = \gamma'' \cdot (\nu \cdot (f'' + b) + \lambda \cdot a'') \cdot M' + \gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot a) \cdot \delta \cdot M'$$

und nun

$$M = M' + \frac{\gamma \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot a) \cdot \delta}{\gamma'' \cdot (\nu \cdot (f'' + b) + \lambda \cdot a'')} \cdot M'$$

alſo

$$99.) \quad M' = \frac{M}{1 + \frac{\gamma \delta \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot a)}{\gamma'' \cdot (\nu \cdot (f'' + b) + \lambda \cdot a'')}}$$

welches die Soolenmenge iſt, die ſich auſſer der erfoderlichen Aufförderung der Brunnenſoole noch auf dem zu ſuchenden Gradirbau iede Sec. aus dem Baßin in den Trog vermittelſt der gegebenen Bewegungskräfte pumpen läßt.

Weil nun die auf 100 F. 2 wändiger Gradirung aufzuziehende Soolenmenge = 0,104 C. F. iſt, ſo hat man

$$0{,}104 : M' = 100 : x$$

alſo $$x = \frac{100}{0{,}104} \cdot M' = 961 \cdot M'$$

folglich nach der 99ten Formel

$$100.) \quad x = \frac{961 \cdot M}{1 + \frac{\gamma \delta \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot a)}{\gamma'' \cdot (\nu \cdot f'' + b + \lambda \cdot a'')}}$$

II. Für einwändige Gradirung. Hier ist die zu 100 F. gehörige Brunnensoole aus der 85ten Formel =

$$\frac{0{,}00039 \cdot \sqrt{(50 - (\beta + \alpha))} \cdot B}{(B - A) \cdot \left(1 - \frac{B - A}{1{,}88 \cdot B}\right)} \cdot \text{C. F.}$$

Und die im Gradirbau iede Sec. auf 100 F. aufzuziehende Soolenmenge = 0,044 C. F. (Form. no. 89.) Man setzt also iezt $\frac{0{,}00039}{0{,}044}$ statt des im ersten Werth von y no. I. befindlichen $\frac{0{,}00068}{0{,}104}$, und so giebt sich hier

$$101.) \quad y = \frac{0{,}00886 \cdot B \cdot \sqrt{(50 - (\beta + \alpha))}}{(B - A) \cdot \left(1 - \frac{B - A}{1{,}88 \cdot B}\right)} \cdot M'$$

wo ich die ganze in M' multiplicirte Grösse wieder δ nennen will. So hat man also wie vorhin

$$102.) \quad M' = \frac{M}{1 + \frac{\gamma\delta \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot a)}{\gamma'' \cdot (\nu \cdot (f'' + b) + \lambda \cdot a'')}}$$

Und weil hier

$$x = \frac{100}{0{,}044} \cdot M' = 2273 \cdot M'$$

wird, so giebt das aus der 102ten Formel

$$103.) \quad x = \frac{2273 \cdot M}{1 + \frac{\gamma\delta \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot a)}{\gamma'' \cdot (\nu \cdot (f'' + b) + \lambda \cdot a'')}}$$

III. Für dreiwändige Gradirung. Hier setzt man statt der no. I. befindlichen $\frac{0{,}00068}{0{,}104}$ die Zahl $\frac{0{,}00085}{0{,}1061}$, wie aus den Formeln no. 87 und 97 erhellet. Es ist aber $\frac{0{,}00085}{0{,}1061} = 0{,}008$ also hier

104.)

$$104.) \quad y = \frac{0{,}008 \cdot B \cdot \sqrt{(50 - (\beta + \alpha))}}{(B - A) \cdot \left(1 - \frac{B - A}{1{,}88 \cdot B}\right)} \cdot M'$$

da ich dann den in M' multiplicirten Faktor wieder $= \delta$ setze, und so wird hier

$$105.) \quad M' = \frac{M}{1 + \frac{\gamma\delta \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot a)}{\gamma'' \cdot (\nu \cdot (f'' + b) + \lambda \cdot a'')}}$$

Und weil hier wegen der 97ten Formel

$$x = \frac{100}{0{,}106} \cdot M' = 942 \cdot M'$$

wird, so giebt die 105te Formel

$$106.) \quad x = \frac{942 \cdot M}{1 + \frac{\gamma\delta \cdot (\nu \cdot (f + b) + \lambda \cdot a)}{\gamma'' \cdot (\nu (f'' + b) + \lambda \cdot a'')}}$$

wo man dann in jedem Fall den Werth von M erst gehörig suchen und substituiren muß.

§. 360.

Umgekehrt aus der Länge des zu betreibenden Gradirbaus für jeden der drei Fälle die nöthigen Bewegungskräfte so zu bestimmen, daß dadurch zugleich die nöthige Brunnensoole auf den Bau verschafft werden kann, hat weiter keine Schwierigkeit und ist im Vorhergehenden schon durch eine ausführliche Anwendung gelehrt worden. Ich bemerke übrigens hier noch einmal, daß die bisherigen Formeln sehr leicht abzuändern sind und daher immer noch brauchbar bleiben, wenn man auch die verschiedenen von mir aus Beobachtungen angenommenen Zahlen nicht so geradhin beibehalten wollte.

§. 361.

In der Vorerinnerung zu der vormaligen Abhandlung über die Bewegungskräfte auf Salzwerken versprach ich, bei einer andern Gelegenheit Berechnungen über die auf Salzwerken anzulegende Sammelteiche zu liefern, und hier wird es zu diesen Berechnungen die schicklichste Stelle sein. Weil dergleichen Sammelteiche nur zur Unterstützung dienen sollen, so ist es schlechterdings nicht rathsam, dergleichen zu Betreibung unterschlächtiger Räder anzulegen

gen, weil solche täglich eine ungeheure Wassermenge brauchen, und daher die größten Teiche in einer denen darauf verwandten Kosten niemals angemessenen Zeit erschöpfen müssen. Ich rede daher hier blos von oberschlächtigen Rädern.

§. 362.

Wenn man mit einem Teich ein oberschlächtiges Rad betreiben will, so wird es in der Ausübung nicht wohl angehen, die Stelle, wo das Wasser in der ersten Schaufel einfällt, geringer als 2 Fus unter der Oefnung der im Teich liegenden Grundkännel zu erhalten, daher ich dieses als die bei Teichen beständig zu beobachtende Höhe annehmen will. Wenn ich ausserdem die Tiefe des Teichs vom Wasserspiegel bis auf die Oefnung der Grundkännel $= \tau$ Fuse setze, so ist bei Sammelteichen die Grösse u eigentlich veränderlich. Ganz im Anfang, wann der Teich noch ganz voll ist, hat man $u = 2 + \tau$, zuletzt aber verschwindet τ und es bleibt $u = 2$, man kann daher in den obigen Formeln bei Berechnungen über Sammelteiche das mittlere Gefälle

$$u = 2 + \tfrac{1}{2}\tau$$

setzen. Wenn nun r den Halbmesser des Theilrisses bedeutet, so kann man hier

$$\zeta = 2r - 2$$

setzen. Ich setze ausserdem nach der oben gegebenen Regel

$$q = \tfrac{1}{8}r$$

Nun lauft das Rad nach den obigen Regeln in einer Minute $\frac{80}{r}$ mal herum, also giebt sich die Zeit t, in der es einmal herumlauft, so

$$\frac{80}{r} : 1 = 60 : t$$

und

$$t = \frac{60 \cdot r}{80} = \tfrac{1}{4}r$$

wo r in Fusen ausgedruckt sein muß. Setzt man noch $\varrho = 0{,}2$ Fus, so giebt die 70te Formel

$$\beta = 2r - 2 - \tfrac{1}{4}r\varrho \cdot \frac{\sqrt{(15{,}625 \cdot (2 + \frac{1}{2}\tau)}}{3r}$$

$$= 2r - 2 - \frac{\varrho \cdot \sqrt{(15{,}625 \cdot (2 + \frac{1}{2}\tau)}}{4}$$

Und

Und wenn ich den Teich 12 Fus tief bis auf die Oefnung der Grundkännel rechne, also $r = 12$ setze, so hat man

$$\beta = 2r - 2 - \frac{0{,}2 \cdot \sqrt{15{,}625 \cdot 8}}{4}$$

$$= 2r - 2{,}559$$

Man hat ferner

$$\delta = 1{,}125 \text{ F.}$$

$$\text{also } u + \delta - 2\sqrt{u\delta} = 8 + 1{,}125 - 2\sqrt{9}$$

$$= 9{,}125 - 6$$

$$= 3{,}125;$$

$$\sqrt{\frac{\delta}{u}} = \sqrt{\frac{1{,}125}{8}} = \sqrt{0{,}1406} = 0{,}375$$

Ferner $k = \frac{1}{2}$ also $\frac{k}{\zeta}(0{,}074 \pm 0{,}03) \cdot \sqrt{\frac{\delta}{u}} = \frac{0{,}0138 \pm 0{,}0056}{2r - 2}$,

endlich $2\sqrt{gu} = 22{,}36$;

Weil ich endlich für diese Untersuchung $\frac{q + \frac{1}{7}\varrho}{q} = 1$ setzen darf, so giebt, wenn man alle die genannten Werthe substituirt, die 91te Formel

107.) $$Z = [\alpha\sigma \cdot (0{,}074 \pm 0{,}03) + \left(\frac{p \cdot 0{,}2}{3r} - \alpha\sigma \cdot \frac{0{,}0138 \pm 0{,}0056}{2r - 2}\right.$$

$$\left. \times 3{,}125 + \psi\right) \cdot 22{,}36] : (2r - 2{,}559)$$

welches die Fundamentalformel für die Betreibung der ein- und zweiwändigen Gradirhäuser ist, die durch oberschlächtige Räder aus 12 Fus tiefen Sammelteichen betrieben werden sollen. Um nicht zu weitläuftig zu werden, überlasse ich es Jedem, die leichte Anwendung auf 3wändige Gradirhäuser selbst zu machen. Hier genügt ohnehin schon eine nur beiläufige Berechnung und man kann daher auch allemal p und ψ leicht ohngefähr bestimmen, so wie es auch hier für die Ausübung gar wohl verstattet ist, in der 69ten Formel allgemein

$$\nu = 1{,}1$$

zu setzen. Da man übrigens zur bloßen Betreibung derer Gradirgebäude keine Druckwerke nöthig hat, so wird hier das g' der 69ten Formel = 0, und

$$\alpha = \gamma \cdot 1{,}1 \cdot (f + b)$$

§. 363.

Man will einen 12 F. tiefen Teich anlegen, mit dem man im Stand ist, 4000 F. zweiwändige Gradirung in den beiden trockensten Sommermonathen vermittelst eines im Theilris 26 Fus hohen ganz oberschlächtigen Rades zu betreiben; man sucht die Morgenzahl, die der hierzu erfoderliche Teich halten muß.

Auflösung. 1.) Die Fläche, wo man den Teich ausgraben will, muß hier über dem Boden, über welchen das Rad hinstreichen soll, d. h. über dem tiefsten Punkt der Räusche etwa $\tau + 2r + 3{,}5 = 12 + 26 + 3{,}5 = 41{,}5$ Fus liegen.

2.) Ich will den mittlern Werth von $\gamma = 1{,}03$ setzen, und $f + b = 26$ Fus, welches die Höhe vom Bassin bis zum obern Rand des über den Dornwänden liegenden Trogs ist. Das giebt

$$\alpha = 1{,}03 \cdot 1{,}1 \cdot 26 = 29{,}46$$

3.) Weil σ anzeigt, wie vielmal 100 F. Gradirung betrieben werden sollen, und die hier gegebene Anzahl $= 4000 = 40 \cdot 100$ ist, so hat man

$$\sigma = 40 \text{ also } \alpha\sigma = 29{,}46 \cdot 40 = 1178{,}4$$

4.) Ich setze hier wie (§. 354. IX.)

$$p = 60$$

5.) Nach dem ersten Theil von ψ in (354 X.) zu schliesen, wird solcher hier etwa

$$= 1 \text{ C. F.}$$

Für den andern Theil will ich, wie dort, gleichfalls 1 C. F. rechnen, so hat man

$$\psi = 2 \text{ C. F.}$$

6.) So giebt die 107te Formel mit dem obern Zeichen gebraucht

$$Z = [1178{,}4 \cdot 0{,}104 + (0{,}307 - 2{,}975 + 2) \cdot 22{,}36] : 23{,}441$$

$$= \frac{122{,}553 - 14{,}936}{23{,}441}$$

$$= \frac{107{,}617}{23{,}441} = 4{,}59 \text{ C. F.}$$

7.) Daß

7.) Daß hier zu den 4000 F. nur etwa ein Drittheil mehr Aufschlagwasser erfodert wird als nach §. 354 zu den 1500 F. wird wohl kein Mistrauen in die Sicherheit der Rechnung erwecken, weil man bedenken muß, daß auch

dort $u = 2{,}5 \quad \zeta = 19$

hier $u = 8 \quad \zeta = 24$

ist: hätte u und ζ dort diese Werthe, so würde man zu dem 1500 schuhigen Bau kaum Z = 2 C. F. gefunden haben.

8.) Wenn ich nun annehme, daß für die beiden Monathe das Rad täglich 16 Stunden laufen soll, so lauft es, wenn ich für diese Zeit 60 Tage setze, überhaupt eine Zeit von 60 · 16 · 60 · 60 = 3456000 Sec. und die in dieser Zeit erfoderliche Menge Aufschlagwasser ist =

3456000 · 4,59 = 15863000 C. F.

Auf des Teichs Abdachung nicht gesehn beträgt demnach seine Oberfläche

$$\frac{15863000}{12} = 1655250 \text{ Q. F.}$$

beinahe = 11500 Q. Ruthen

= $71\frac{7}{8}$ Morgen (zu 160 Q. R.)

Weil aber das Ufer ringsum den Teich nothwendig eine Abdachung bekommen muß, wodurch der cubische Inhalt des Teichs wieder verkleinert wird, so muß das Stück Land, wo der Teich angelegt werden soll, grösser als $71\frac{7}{8}$ Morgen sein. Eine ohngefähre Ueberrechnung wird zeigen, daß man dieserwegen die Fläche des ganzen hiezu nöthigen Stück Landes

73 Morgen

groß annehmen könne.

§. 364.

Man hat wirklich auf vielen Salzwerken beträchtliche Teiche angelegt, und manchmal mit Schaden, vielleicht weil ihre Urheber nicht allemal im Stand gewesen sind, nur einigermasen zu übersehen, was sie sich von so kostbaren Anlagen zu versprechen hatten. Auf dem bemerkenswürdigen Salzwerk meines Geburtsorts, zu Nauheim im Hanauischen, hat der berühmte vormalige Heßische Minister Waitz von Eschen einen solchen Teich von 45 Morgen angelegt, mit dem sie dort bei sonstigem Mangel an Aufschlagwasser ihre Gradirung, wie man mich versichert hat, 4 Wochen lang betreiben können. Es

ist mir aber weder ihre Gradirung, die sich im Längenmaas der Gradirhäuser etwa auf 15000 Fus belauft, noch ihr Gefälle hinlänglich bekannt *).

§. 365.

Wenn man die 4000 Fus mit Menschen vermittelst der Handpumpen betreiben wollte, so gehörten, wenn sie die Gradirung so wie das Rad betreiben sollten auf 100 Fuse drei Gradirer, wie nicht nur über menschliche Kräfte anzustellenden Rechnungen sondern auch denen von mir wirklich darüber angestellten Beobachtungen gemäß ist. Zu einem 700 Fus langen einwändigen Gradirbau, der dazu keine über 20 F. hohe Dornwand hatte, wurden bei guter Witterung ausser sieben Gradirern allemal noch drei Taglöhner erfodert, wenn der Bau gehörig sollte betrieben werden, die auch wirklich angestellt wurden. Das betrüge also auf 700 F. zweiwändige Gradirung bei eben der Höhe der Dornwände $\frac{3}{4} \cdot 10 = 22{,}5$ also allemal, zumal wenn die Dornwände, wie ich angenommen habe, noch einige Fus höher sind, auf 100 F. zweiwändige Gradirung vollkommen drei starke Mann. Folglich auf 4000 Fus $40 \cdot 3 = 120$ Mann, deren Lohn sich täglich etwa auf 40 Fl. also in 60 Tagen auf $60 \cdot 40 = 2400$ Fl. belauft; nimmt man nun an, daß wegen der erfoderlichen Aufsicht doch 10 Gradirer erfodert würden, so bleiben noch 2200 Fl. übrig, die durch das Rad erspahrt werden. Dagegen lassen sich die Kosten dieses Teichs etwa so überschlagen. Der Morgen Land koste im Ankauf etwa 100 Fl. da dann 20 Fl. mehr oder weniger das Resultat der Rechnung nicht beträchtlich abändern. Ferner koste der erste Morgen zu 12 F. tief etwa 700 Fl. Seegräberlohn, der zweete 20 Fl. weiter, und so ieder folgende immer 20 Fl. weiter als der nächst vorhergehende, weil das Ausfahren der Erde immer beschwerlicher wird; so sind die Kosten von 73 Morgen **) =

$$(100 + 700) + (100 + 700 + 20) + (100 + 700 + 40) \cdots + (100 + 700 + 72 \cdot 20)$$

$$= \frac{800 + (800 + 72 \cdot 20)}{2} \cdot 73 \text{ beinahe } = 111000$$

Fl.

*) Bei Hrn. Kammerrath Klippstein, einem Sohn des noch lebenden Hessischen verdienstvollen Ministers, befindet sich in seinen mineralogischen Briefen 1tes Stück in der hierher gehörigen Stelle ein beträchtlicher Schreibfehler.

**) Der cubische Inhalt ist eigentlich geringer, weil indessen die ordentliche Einrichtung und Abdachung des Damms gewöhnlich wieder neue Kosten macht, so behalte ich die Zahl 73 bei.

Fl. *) wovon die Zinsen zu 5 p. c. jährlich 5550 Fl. betragen, daß also noch 5550 — 2200 = 3350 Fl. Verlust dabei ist. Mit diesen 3350 Fl. liesen sich noch beinahe 6000 F. Gradirung während diesen 60 Tagen betreiben, und diese würde das Aufschlagwasser noch mit betreiben, wenn man statt 2r = 26 etwa 2r = 65 oder das ganze Gefälle vom Wasserspiegel bis zur tiefsten Stelle der Räusche in 363 no. I. etwa = 80 hätte, da man dann zwei oberschlächtige Räder hinter einander anlegen könnte und von der Anlage des Teichs keinen Schaden hätte.

Legte man für das 26schuhige Rad einen Teich von einem Morgen an, so würde solcher die 4000 F. Gradirung nur $\frac{60}{77}$ Tag betrieben; der erspahrte Gradirerlohn beträgt für diese Zeit etwa 30 Fl.

Die ganze Anlage dieses Teichs aber kostet etwa 800 Fl. wovon die jährliche Zinsen zu 5 p. c. 40 Fl. betragen, sollte demnach von der Anlage dieses Teichs kein Schaden zu erwarten sein, so müßte man statt r = 13 etwa $r = 13 + \frac{1}{3} \cdot 13 = 17$ F. haben, also das ganze Gefälle vom Wasserspiegel bis zur untersten Stelle der Räusche nach (363. no. I.) etwa =

49 Fus,

Weil man nun für die Ausübung in Fällen dieser Art der Wahrheit nahe genug kommt, wenn man annimmt, daß die zu 1 bis 73 Morgen gehörige Werthe des Gefälles arithmetisch wachsen, so darf man nur den Unterschied der Glieder einer arithmetischen Reihe berechnen, deren erstes Glied 49 und letztes 80, die Anzahl der Glieder aber 73 ist; und nach (Erl. der An. endl. Gr. S. 5. no. 2.) hat man den gesuchten Unterschied =

$$\frac{80 - 49}{73 - 1} = \frac{31}{72} = 0,43$$

Auf diese Berechnung gründet sich nachstehende Tafel, wo nämlich das Gefälle nicht kleiner genommen werden darf, wenn man nicht den Teich mit offenbarem Schaden anlegen will.

*) Der erwähnte Nauheimer Teich soll gegen 60000 Fl. gekostet haben.

Morgenzahl eines Teichs, dessen Tiefe 12 Fus ist.				Erfoderliches Gefälle vom Wasserspiegel des vollen Teichs bis zur tiefsten Stelle der Räusche in Fusen.	
I.	II.			I.	II.
1	2	—	—	49	49,43
3	4	—	—	49,86	50,29
5	6	—	—	50,72	51,15
7	8	—	—	51,58	52,01
9	10	—	—	52,44	52,87
11	12	—	—	53,30	53,73
13	14	—	—	54,16	54,59
15	16	—	—	55,02	55,45
17	18	—	—	55,88	56,31
19	20	—	—	56,74	57,17
21	22	—	—	57,60	58,03
23	24	—	—	58,46	58,89
25	26	—	—	59,32	59,75
27	28	—	—	60,18	60,61
29	30	—	—	61,04	61,47
31	32	—	—	61,90	62,33
33	34	—	—	62,76	63,19
35	36	—	—	63,62	64,05
37	38	—	—	64,48	64,91
39	40	—	—	65,34	65,77
41	42	—	—	66,20	66,63
43	44	—	—	67,06	67,49
45	46	—	—	67,92	68,35
47	48	—	—	68,78	69,21
49	50	—	—	69,64	70,07

Aus denen Zahlen für das Gefälle giebt sich nach (§. 363. no. I.) der Durchmesser des Theilrisses vom Rad, wenn man von ihnen 15,5 F. abzieht. Damit nun die Räder nicht zu ungeheuer groß werden, so ist es rathsam zu Teichen, die über etliche Morgen groß sind, das Gefälle zu brechen, und zwei Räder hinter einander anzulegen.

§. 366.

§. 366.

Man sieht übrigens, daß ich hier weder von Teichen, die beständigen Zufluß von Bachwasser haben, noch auch von Quellteichen rede, sondern blos von solchen, die sich während der Zeit, da sie nicht gebraucht werden, einmal, es sei nun auf welche Art es wolle, anfüllen, und nun während dem Gebrauch selbst keinen merklichen Zufluß haben, der etwa sonst ohne den Teich unbenutzt bliebe. Man wird indessen auch da, wo die Teiche beträchtlichen Zufluß haben, einen ziemlich sichern Anschlag machen können, wie vielmal sich die Teiche den Sommer über ganz werden benutzen lassen; und wenn man nmal rechnen könnte, so dürfte man nur die Zahlen für den erfoderlichen Halbmesser des Rades, wie sich solche aus der zwoten Rubrike der vorgesetzten Tafel ergeben, durch n dividiren; die Zahl 15,5 zu diesem Quotienten addirt, gäbe alsdann das erfoderliche Gefälle vom Wasserspiegel des vollen Teichs an gerechnet in Fusen. Man hat auf dem hiesigen Salzwerk einen 12 Fus tiefen Teich von etwa zween Morgen angelegt, der sich für ieden Sommer zum Gebrauch einmal fülle. Zu entscheiden, ob sich solcher gehörig verintereßire, müßte man sein wirkliches Gefälle mit dem nach der Tafel erfoderlichen vérglichen. Dieses ist 49 F. und das wirkliche Gefälle noch was weniges stärker, also ist dieser Teich allerdings nach Regeln angelegt. Ausserdem hat man auf eben diesem Salzwerk noch einen Teich von etwa 4 Morgen angelegt, dessen Gefälle von des vollen Teichs Wasserspiegel gerechnet 32 Fuse beträgt. Dieser hat aber Quellen, und man kann annehmen, daß er sich wenigstens 3 mal im Jahr zum Gebrauch fülle. Nun ist der Durchmesser des zum Teich von 4 Morgen gehörigen Rades aus der Tafel = 50,29 — 15,5 = 34,79, dieser hier durch n = 4 dividirt giebt 8,69 und hierzu 15,5 addirt giebt 24,19 zum erfoderlichen Gefälle; da nun das wirkliche Gefälle = 32 ist, so ist solches grösser als es zu Vermeidung des Schadens zu sein brauchte, und es ist also auch dieser Teich mit Vortheil angelegt. Das Bisherige dient zur Entscheidung der Frage: ob und wo auf einem Salzwerk ein Teich anzulegen sei? Die Frage wie? ist oben in (Erl. zu K. §. 42.) berührt worden.

§. 367.

Es ist nur noch übrig, den Gebrauch der Tritträder näher zu erläutern. Dazu soll folgende Aufgabe dienen.

Es soll ein 1020 Fus langer zweiwändiger Gradirbau mit einem Trittrad vermittelst starker Pferde gehörig betrieben werden; man sucht die gesammte hierzu dienliche Einrichtung.

Aufl. 1.) Der Halbmesser des Trittrades sei r = 20 F.

2.) Die

2.) Die Dicke der Triebstöcke nehme man = 2,5 Zoll, welche bei gutem Holz zuversichtlich stark genug ist, wenn man nur ihre Länge nicht gar zu groß annimmt.

3.) Die Mittelpunkte der Triebstöcke kommen also 5 Zoll weit von einander, und wenn man nun 24 Triebstöcke nimmt, so ist der Durchmesser des Kreises, worin die Mittelpunkte der Triebstöcke liegen $= \frac{24 \cdot 5}{3,141} = 38,2$ Zoll = 3 F. 2,2 Z.

4.) Die Entfernung der Mittelpunkte der Zähne am Sternrad, beträgt gleichfalls 5 Zoll, aber die Dicke der Zähne nur $\frac{7}{8} \cdot 2,5 = 2,18$ Z. wofür man $2\frac{1}{4}$ Zoll annehmen darf; ihr Abstand von einander bleibt also noch $2\frac{3}{4}$ Z. so daß Zähne und Triebstöcke beim Eingreifen noch $\frac{3}{8}$ Zoll Spielraum behalten *) welches übrig genug ist.

5.) Die Höhe der Kurbel will ich $1\frac{1}{2}$ Fus setzen, also den Kolbenhub = 3 F.

6.) Daraus giebt sich nach (S. 271. d. Erl.) die Zeit eines Kolbenspiels $= \frac{6}{2 : 3} = 9$ Sec.

7.) Weil das Rad von Pferden getreten werden soll, so ist hier die Geschwindigkeit des tretenden Thiers = 4 F. der Umfang des Rades ist 3,141. 40 = 125,64 F. also die Zeit, binnen der das Trittrad einmal herumkommt, $= \frac{125,64}{4}$ 31,41 Sec. Hieraus giebt sich die Verhältnis der Anzahl Zähne zur Anzahl Triebstöcke = 31,41 Sec. : 9 Sec. = 3,49 : 1

8.) Also ist die Anzahl der Zähne = 3,49 · 24 = 83,76, wofür man 84 nehmen kann, ohne daß es in der Bewegung eine merkliche Aenderung gäbe. Weil nun die Entfernung der Mittelpunkte der Zähne von einander 5 Zoll beträgt, so ist der Umfang des Sternrads = 84 · 5 = 420 Zoll = 35 Fus und nun sein Durchmesser $= \frac{35}{3,141} = 11,14$ F. = 11 F. 1,71 Zoll.

9.) Ich

*) Mir sind geschickte Mühlärzte bekannt, die bei Verfertigung ihres Räderwerks, selbst beim Räderwerk in Windmühlen, gar keinen Spielraum lassen, und ich bin ein Augenzeuge davon, daß ihr verfertigtes Räderwerk sogar in Windmühlen bei Stürmen die Probe einer guten Arbeit ausgehalten hat.

Digitized by Google

9.) Ich will einsweilen auf drei Thiere rechnen, die im Rad neben einander gehen müssen, und deswegen die Breite des Rades vorläufig = 7,5 F. annehmen.

10.) Wenn man nun noch den beiden Wellbäumen die gehörige Länge und Dicke giebt, alle zu dem Bau der gesammten Maschine gehörige Stücke überschlägt, zu Pfunden macht und dann durch 68 als das Gewicht eines Rhl. C. F süses Wasser dividirt, so findet man, daß das Gewicht aller zu der ganzen Maschine gehörigen Theile, von welcher die Wellzapfen gedruckt werden, etwa so groß ist, als das Gewicht von 300 C. F. Wasser. Man hat also hier

$$p = 300$$

11.) Wenn der Bau nicht weit vom Rad steht, so kann man nach der bisherigen Rechnung etwa

$$\psi = 0{,}5$$

setzen.

12.) Es sei $\varrho = 0{,}02$ F.

13.) Die Höhe vom Baßin bis zum obern Rand des Troges sei

$$f + b = 26 \text{ Fus}$$

wo man wieder nur ein bloses Saugwerk nöthig hat.

14.) So wird $w = 2f : b = 52 : 3 = 17{,}3$ und

$$\nu = 1 + \frac{1}{17{,}3} = 1{,}057$$

aber $g' = 0$;

15.) Um für die Ausübung hinreichend sicher zu gehen, will ich hier

$$\beta = \tfrac{4}{7}$$

setzen (s. §. 314. d. Erl.)

16) Im Mittel setze ich wieder

$$\gamma = 1{,}03$$

17.) Weil die gegebene Anzahl der Gradirung = 10 · 100 ist, so hat man

$$\sigma = 10$$

übrigens seze ich hier $\frac{q + \frac{1}{75}\rho}{q} = 1$, und wenn man nun in der 92ten Formel überall das obere Zeichen gebraucht, so erhält man

P = dem Gewicht von

$$\frac{\frac{27 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}057 \cdot 26 \cdot 1{,}04}{9{,}216} + \frac{1{,}5 \cdot 300 \cdot 0{,}2}{20} + 4{,}5 \cdot 0{,}5\sqrt{\frac{15{,}625}{2{,}304}}}{\left(1 - \frac{0{,}2}{60}\right) \cdot \frac{4}{5} \cdot 5{,}208}$$

$$= \frac{80{,}51 + 4{,}5 + 1{,}86}{2{,}306} = \frac{90{,}87}{2{,}306} = 39{,}4$$

C. F. Wasser also

$$= 39{,}4 \cdot 68 = 2679 \text{ ℔}$$

Bedient man sich nun starker Pferde, deren Gewicht man nach (327. §. d. Erl.) auf 900 ℔ schätzen kann, so erhellet, daß gerad drei solche Pferde zur Betreibung des Trittrades hinreichend sind, und daß also die Voraussetzung in no. 9. weiter keine Korrektion nöthig hat. Um aber auch die Thiere gehörig ablösen zu können, müßte man zu diesem Trittrad beständig sechs Pferde halten.

§. 368.

Einigermasen den Vortheil dieses Trittrades zu übersehen, kann folgender Ueberschlag dienen. Wenn man die Zinsen von allem, was zur Erbauung der ganzen Maschine und Ankaufung derer Pferde verwandt wird, die jährliche Unterhaltungskosten der Maschine selbst und der Pferde gehörig in Anschlag bringt, auch etwa noch alle drei Jahre auf den Abgang eines Pferds zählt und den Lohn des Knechts mit dazu rechnet, so nehme ich gewiß das alleräusserste, wenn ich die sämmtliche Kosten vom Trittrad jährlich auf 900 Fl. seze.

Sollten nun die 1000 Fus Gradirung durch Gradirer vermittelst der Handpumpen ebensogut betrieben werden, so würden dazu $10 \cdot 3 = 30$ Mann erfodert, deren Lohn sich täglich auf 10 Fl. beläuft, und wenn sie solchen 240mal beziehen, so ist ihr gesammter Lohn $= 10 \cdot 240 = 2400$ Fl. statt dessen ich nur 2100 Fl. rechne, weil doch wegen der Aufsicht allemal einige Gradirer nothwendig sind. So würden also im gegenwärtigen Fall offenbar wenigstens $2100 - 900 = 1200$ Fl. durch das Trittrad jährlich erspahrt. Dieses

ist

ist aber nur der Vortheil während der Gradirzeit; wenn man nun noch überlegt, daß man für die berechneten Unkosten des Trittrads die sechs Pferde auch noch den Winter über, etwa zu Anfüllung angelegter Vorrathsbehälter (Reservoirs) mit Brunnensoole, oder zu sonstigem Gebrauch benutzen kann, so wird der Vortheil eines solchen Trittrads beim Mangel des Aufschlagwassers gegen den Gebrauch der Handpumpen ungemein beträchtlich.

§. 369.

Ich will nun noch die sämmtlichen Abmessungen eines solchen Trittrads mit Räderwerk, das ich auf einem gewissen Salzwerk angetroffen, und woran ich alle Theile selbst sorgfältig nach einem Rheinl. Maasstabe abgemessen habe, hier beschreiben, und zugleich zeigen, wie der Effekt dieses Rades zu berechnen ist.

I. Abmessungen des Trittrades.

	Fus	Zoll	Lin.
1.) Der Durchmesser des innern Umfangs	36	0	0
2.) Die Breite des Rades oder Bodens, worauf die Thiere treten	5	0	0
3.) Die Dicke des Bodens, wobei ich die auf dem Boden angenagelte Querleisten mit drein rechne	0	3	0
4.) Die Höhe eines ieden Kranzes, worauf der Boden befestiget ist	0	5	0
5.) Die Breite desselben	0	3	6
6.) Die Länge des Wellbaums	19	8	0
7.) Die Dicke desselben innerhalb den beiden Ebenen des Rades, wo er vierkantig ist, ins Gevierte	1	10	0
Ausserdem ist er rund, und sein Durchmesser im Mittel	1	6	0
8.) Der Durchmesser des Wellzapfens	0	3	4

9.) Durch iede der beiden Ebenen des Rades (fig. 35.) sind vier starke vierkantige Hölzer bezogen, welche sich in der Mitte an das viereckte Stück des Wellbaums fest anschliesen; diese vier Hölzer sind an sechzehn Stellen verlocht und vermittelst der Riegeln fl u. s. w. gehörig verbunden. Von iedem der längern Riegeln wie mn, gehen wieder zween Aerme dk, ek aus. Die Dicke von iedem dieser Hölzer beträgt im Mittel 20 Q. Zoll.

II. Abmessungen des Sternrades.

		Fus.	Zoll.	Lin.
10.)	Dieses hat mit dem Trittrad einerlei Wellbaum			
11.)	Mitten durch die Ebene dieses Rades gehn zwei starke breite Hölzer, die einander durchkreuzen, und durch den Wellbaum durchgehen. Es ist die Dicke dieser Hölzer	0	3	3
	Die Breite	1	0	0
	Diese ist auf des Rades Ebene senkrecht.			
12.)	Die Breite vom Umfang dieses Rades, worauf die Zähne stehen	0	6	0
	Die Dicke	0	6	6
13.)	Der Durchmesser bis ans Ende der Zähne gerechnet	12	6	0
14.)	Die Anzahl der Zähne ist 120.			

III. Abmessungen des Trillings.

15.)	Der Durchmesser bis in die Mitte der Triebstöcke gerechnet	3	4	0
16.)	Die Dicke der Triebstöcke	0	2	1
17.)	Zwischenweite zwischen den Triebstöcken	0	1	10
18.)	Die Länge des Wellbaums	11	6	0
19.)	Der Durchmesser desselben	1	4	0
20.)	Höhe der beiden Kränze, worin die Triebstöcke eingesteckt sind	0	8	0
21.)	Breite derselben	0	3	6
22.)	Der Durchmesser der Wellzapfen	0	2	6
23.)	Die Anzahl der Triebstöcke ist 32.			

Uebrigens wird das Rad von zweien neben einander gehenden Maulthieren getreten, die alle 2 Stunden von einem andern Paar abgelöst werden.

Aus diesen Abmessungen ergiebt sich nun p so:

1.) Der Umfang des Rades oder des Bodens, worauf die Thiere treten, ist $3,141 \cdot 36 = 113,076$ F. lang und 5 F. breit also sein Quadratinhalt $= 5 \cdot 113,076 = 565,38$ Q. F. die Dicke $\frac{1}{4}$ F. also

Der cub. Inhalt des Bodens $= \frac{565,38}{4} = 141,34$ C. F.

2.) Weil

2.) Weil der Boden am innern Rand des Kranzes angenagelt ist, so ist dieser im Mittel etwas weniges gröſſer als der Umfang des Bodens, und man kann daher seine Länge = 114 F. setzen. Das Produkt aus der Höhe des Kranzes in seine Breite ist $\frac{5}{12} \cdot \frac{3,5}{12} = \frac{17,5}{144}$ Q. F. also sein cubischer Inhalt $= 114 \cdot \frac{17,5}{144} = 13,85$ C. F. und nun

der cub. Inhalt beider Kränze = 27,7 C. F.

3.) Die Länge des Wellbaums auſſer dem Rade ist $19\frac{2}{7} - 5 = 14\frac{2}{7}$ F. sein Umfang $= 3,141 \cdot 1\frac{1}{2} = 4,7115$ also sein cub. Inhalt $= 14\frac{2}{7} \cdot 4,7115 \cdot 0,375 = 25,913$ C. F. Das Stück des Wellbaums innerhalb des Rades beträgt $5 \cdot (1\frac{1}{2})^2 = 16,805$ C. F. also

der cub. Inhalt des ganzen Wellbaums = 42,718 C. F.

4.) Das Gewicht der gesammten innerhalb des Rades befindlichen Aerme, Riegel ꝛc. giebt sich ziemlich genau, wenn man für iede Seite oder Ebene des Rades 8 dergleichen Hölzer wie bc von 30 F. lang und 20 Q. Z. dick, also zusammen 16 solcher Hölzer berechnet. Das giebt nun

den cub. Inhalt dieser Hölzer $= 16 \cdot 30 \cdot \frac{20}{144} = 66,666$ C. F.

5.) Die beiden Welljapfen will ich zu 3 C. F. Holz anschlagen.

6.) Alle Theile des Trittrads von no. 1 — 5 zusammengerechnet machen nun

	141,340
+	27,700
+	42,718
+	66,666
+	3,000
=	281,424 C. F. Holz.

Und wenn ich nun im Durchschnitt den C. F. zu 60 ℔ rechne, so ist

das Gewicht des ganzen Trittr. mit seiner Welle = 16885 ℔.

7.) Die Länge der beiden durch des Sternrads Ebene einander durchkreuzenden Hölzer kann man nicht über 10 Fus annehmen, weil das durch den

Wellbaum gehende Stück schon bei Berechnung des Wellbaums mit in Anschlag gekommen ist. Es ist also

der cub. Inhalt dieser beiden Hölzer zusammen $= 2 \cdot 10 \cdot 1 \cdot \frac{3\frac{1}{4}}{12} = 5{,}416$ C. F.

8.) Die mittlere Länge vom Umfang des Sternrads ist $3{,}141 \cdot 12\frac{1}{4} = 38{,}477$ F. also sein cub. Inhalt $= \frac{1}{2} \cdot \frac{6{,}5}{12} \cdot 38{,}477 = 10{,}42$ C. F.

9.) Die Zähne betragen zusammen etwa $\frac{1}{2}$ C. F.

10.) Also der cub. Inhalt des ganzen Sternrads =

$$\begin{array}{rr} & 5{,}416 \\ + & 10{,}420 \\ + & 0{,}500 \\ \hline = & 16{,}336 \text{ C. F.} \end{array}$$

und sein Gewicht $= 60 \cdot 16{,}336 = 980$ ℔.

11.) Der Durchmesser des zum Trilling gehörigen Wellbaums ist $1\frac{1}{2}$ F. also sein cub. Inhalt $= 11\frac{1}{2} \cdot 3{,}141 \cdot (\frac{3}{4})^2 = 16{,}054$ C. F.

12.) Die mittlere Länge des Kranzes, worin die Triebstöcke stecken, giebt sich $= 3{,}141 \cdot 2\frac{3}{4}$ F. $= 8{,}376$ F. also

sein cub. Inhalt $= 8{,}376 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3{,}5}{12} = 1{,}628$ C. F.

13.) Die Triebstöcke betragen etwa 2 C. F.

14.) Die beiden Wellzapfen mit den Kurbeln will ich in Rücksicht ihres Gewichts zu 4 C. F. anschlagen.

15.) Also ist der cub. Inhalt aller zum Trilling gehörigen Stücke =

$$\begin{array}{rr} & 16{,}054 \\ + & 3{,}256 \\ + & 2{,}000 \\ + & 4{,}000 \\ \hline = & 25{,}310 \text{ C. F. Holz} \end{array}$$

und

und ihr Gewicht = 60 · 25,31 = 1519 ℔. Addirt man nun die letzten Zahlen aus no. 6, 10 und 15. so giebt sich das ganze Gewicht aller zur ganzen Maschine gehörigen Theile =

$$\begin{array}{rr} & 16885 \text{ ℔} \\ + & 980 \\ + & 1519 \\ \hline = & 19384 \text{ ℔.} \end{array}$$

16.) Dieses ganze Gewicht durch 68 dividirt giebt endlich

$$p = 285 \text{ C. F. Wasser}$$

17.) Die Höhe der Kurbel ist $\frac{1}{4}$ F. also $b = 2{,}5$ F.

18.) Nimmt man also an, daß das Rad sechs 6zöllige Pumpen gleich in der Nähe zu betreiben habe, so läßt sich die an den Kolben entstehende Friktion als einen Widerstand ansehen, der sich so stark als das Gewicht von 0,8 C. F. Wasser der Bewegung der Warze widersetzt. Wenn ich nun hier wieder $\beta = \frac{4}{5}$ setze, so wird das Moment von $P = \frac{4}{5} r P$ beinahe hier $= 9P$, und man kann also hier

$$\psi = \frac{(\frac{1}{4})}{9} \cdot 0{,}8 = 0{,}11 \text{ C. F.}$$

setzen.

19.) Das Gewicht beider Maulthiere zusammen rechne ich = 1400 ℔. (§. 327. d. Erl.) das giebt mit 68 dividirt

$$P = 20{,}6 \text{ C. F. Wasser.}$$

20.) Es sei nun die ganze Höhe, zu der die Soole hinaufgebracht werden soll, $f + b = 25$ F. also

$$f = 25 - b = 22{,}5 \text{ F.}$$

Da dann $g' = 0$

$$w = \frac{2f}{b} = \frac{45}{2{,}5} = 18$$

$$\text{also } v = 1 + \frac{1}{18} = 1{,}05$$

wird.

21.)

21.) Gebraucht man nun die untern Zeichen der 78ten Formel, so erhält man die Soolenmenge, die alle Sec. aufgezogen werden kann, $\varrho = \frac{1}{8}$ F. genommen,

$$M = \frac{5,184}{27 \cdot \gamma \cdot 1,05 \cdot 25} \cdot \left(\left(1 - \frac{1}{24 \cdot 18} \right) \cdot \frac{4}{5} \cdot 6,944 \cdot 20,6 \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1,5 \cdot 285}{8 \cdot 18} + 4,5 \cdot 0,11 \right) \sqrt{\left(\frac{15,625}{1,296} \right)} \right)$$

wo ich $\frac{q}{q + \frac{1}{3}\varrho} = 1$ gesetzt habe, so wie sich auch hier $1 - \frac{1}{24 \cdot 18} = 1$ setzen läßt; also

$$M = \frac{0,372}{\gamma} \text{ C. F.}$$

Wäre also die Soole 2löthig, so hätte man, den Werth von γ aus der obigen Tafel substituirt,

$$M = \frac{0,372}{1,014} = 0,366 \text{ C. F.}$$

und für iede Minute

21,96 C. F.

Soviel könnten also die Thiere auf diesem Salzwerk alle Minuten auf eine Höhe von 25 F. bringen.

Sie werden gebraucht, Brunnensoole aus zweenen gleich dabei gelegenen Brunnen aufzufördern, und ich bin ein Augenzeuge davon, daß sie, wenn sie gehörig sind angehalten worden, wirklich öfters 10 bis 12 C. F. etwa $1\frac{1}{2}$ löthiger Soole auf eine Höhe von 50 Fusen in einer Minute aufgefördert haben, welches sehr wohl mit der angestellten Berechnung übereintrift.

§. 370.

§. 370.

I.) Dieſes Buch lag ſchon ganz zum Abdruck fertig, als mir folgende Preisaufgabe, welche die Akademie zu Lyon gegeben haben ſoll, zu Geſicht kam:

wie ſoll die Breite, die Form und der Bau der Felgen an den Rädern aller Arten am füglichſten eingerichtet ſein?

und dieſes iſt die Veranlaſſung zu folgender kurzen Abhandlung, die ich zu einem andern Gebrauch aufgeſetzt hatte, iezt aber hier beizufügen für dienlicher gehalten habe. Man wird mich übrigens entſchuldigen, wenn ich ſie ſo, wie ich ſie anfänglich abgefaßt hatte, ganz ungeändert beibehalte, und daher Verſchiedenes darin erwähne, was ich oben ſchon an gehörigem Ort beigebracht habe.

II.) Wie mir es vorkommt, ſind die Ausdrücke in der Preisaufgabe etwas zu unbeſtimmt. Was ſoll **Form und Bau** der Felgen eigentlich heiſen? Da erfodert wird, daß der Waſſerſtrahl immer ſoviel möglich auf einerlei Art muß auffallen können, und daher alle **Schaufeln** oder **Zellen** gegen die Axe des Rades einerlei Lage haben müſſen, ſo iſt wohl kein Zweifel, daß die Felgen zuſammen einen Kreis bilden müſſen, deſſen Mittelpunkt in des Rades Axe liegt, und ſo muß alſo die äuſere Gränze eines leden Felgens ein Bogenſtück dieſes Kreiſes, und die innere der äuſern gleichlaufend ſein. Soll ſich übrigens **Form** auch noch auf die zwiſchen dieſen beiden, der innern und äuſern Gränze, enthaltene Flächengeſtalt der Felgen beziehen, ſo iſt wohl wieder kein Zweifel, daß es am dienlichſten iſt, wenn beide Gränzen in **einer Ebene** liegen, alſo die breiten Flächen der Felgen nicht **gekrümmt** ſondern **eben** ſind. So könnte man z. B. auf den Einfall kommen, die einzelnen zwiſchen den Felgen liegenden Zellen nach innen d. i. nach des Rades Mittelpunkt zu, weiter als nach auſen zu machen, ſo daß der gegen einander überſtehenden Felgen äuſere Gränzen näher beiſammen wären, als ihre innere. Begreiflich könnten bei einer ſolchen Einrichtung die Flächen der Felgen keine **Ebenen** ſein, ſondern ſie wären Stücken oder **Zonen** einer Kegelfläche. Auſerdem, daß eine ſolche Einrichtung keinen beſondern Nutzen gewähren könnte, würde dadurch der Bau des Rades nur ſchwieriger gemacht, und gar nicht die Sache eines gemeinen Werkmeiſters ſein.

III.) Daß es aber für die **Breite** der Felgen, bei einer gegebenen Länge der Schaufeln, eine gewiſſe Beſtimmung gebe, wobei das Rad den größten Effekt leiſtet, läßt ſich ſogleich aus folgender Bemerkung überſehen:

1.) Je ſchmäler die Felgen ſind, deſto weiter wird das in die Zellen fallende Aufſchlagwaſſer von der Axe des Rades entfernt, folglich das Moment der Kraft deſto groſſer.

2.) Je ſchmäler die Felgen ſind, deſto früher fangen die Zellen beim Umdrehen des Rades an, ihr Waſſer auszuſchütten, folglich der Effekt deſto kleiner.

Alſo darfen die Felgen wegen (1.) nicht zu breit und wegen (2.) nicht zu ſchmal ſein, und es muß daher eine gewiße Breite die vortheilhafteſte ſein, wenn die Länge der Zellen nebſt der von ieder Zelle aufzufangenden Waſſermenge beſtimmt iſt.

IV.) Jede Zelle wird bekanntlich durch folgende fünf Flächen gebildet:

1.) Die Riegelſchaufel, Kropfſchaufel oder den Ries, deren Profil hier ab iſt (fig. 49.), die verlängert durch den Mittelpunkt C geht.

2.) Die Stosſchaufel deren Profil bd iſt.

3.) u. 4.) Die beiden parallelen Stücke des Felgens, wovon hier eabd das eine abbildet.

5.) den Boden des Rades ea.

Uebrigens habe ich de ſo gezogen, daß ſie verlängert durch den Mittelpunkt C geht, und ſo kann man den kubiſchen Inhalt ieder Zelle, wenn l ihre Länge bedeutet

$$= \frac{ed + ab}{2} \cdot kb \cdot l$$

ſetzen.

V.) Wenn r der Halbmeſſer des Theilriſſes iſt und in Fuſen ausgedruckt wird, ſo läßt ſich die Anzahl der Zellen $= 6 \cdot r$ annehmen. Nur zur Bequemlichkeit des Werkmeiſters kann man in iedem Fall dieſe Zahl ſo abändern, daß ſie ſich genau durch 4 theilen läßt, und alſo ieder Quadrant gleich viele Schaufeln bekommt.

VI.) Wenn die Felgen auf dem Radſtuhl gehörig zuſammengefügt ſind, ſo wird in dem Mittelpunkt C ein Zapfen eingeſchlagen und ſolcher alsdann durch das Loch einer Stange durchgeſteckt, die ſich nun frei um den Zapfen herumdrehen läßt. Vermittelſt dieſer um C beweglichen Stange beſchreibt man alsdann mit einem daran gehaltenen Röthel auf den Felgen den Theilriß, auf welchem man dann weiter die nach (V.) beſtimmte Anzahl Schaufeln abtheilt. Wie Stos- und Riegelſchaufel gewöhnlich beſtimmt und verzeichnet werden, iſt oben bemerkt worden; ich werde mich aber hierüber in der Folge (no. XIV.) näher erklären.

VII.) Wenn die Breite der Felgen $= f$, die Breite der Riegelſchaufel $= \frac{1}{3} f$. und der Halbmeſſer des Theilriſſes $= r$ alles in Fuſen gegeben iſt, und nun

alles

alles nach (no. V. und VI.) wie gewöhnlich eingerichtet wird, so findet man nach bekannten trigonometrischen Sätzen

$$\text{Die Höhe der Stossschaufel bd} = \frac{(r + \frac{2}{3}f) \cdot \text{Cof}\left(\frac{60^\circ}{r} + \text{ang sin}\ \frac{r \cdot \text{Cof}\frac{60^\circ}{r}}{r + \frac{2}{3}f}\right)}{\text{Cof}\ \frac{60^\circ}{r}}$$

1 Ex. Es sei $r = 5\frac{1}{2}$, $f = \frac{3}{4}$, also $r + \frac{2}{3}f = 6$, so ist

$$\text{Cof.}\ \frac{60^\circ}{r} = \text{Cof}\ 10^\circ 54' = 0{,}98195 \cdots$$

$$\text{und}\ \frac{r}{r + \frac{2}{3}f} = \frac{11}{12}, \text{ also } \frac{r \cdot \text{Cof}\ \frac{60^\circ}{r}}{r + \frac{2}{3}f} = \frac{11 \cdot 0{,}98195}{12}$$

$$= 0{,}90012 \cdots = \sin 64^\circ 10'$$

$$\text{und Cof}\left(\frac{60^\circ}{r} + 64^\circ 10'\right) = \text{Cof}\ 75^\circ 4' = 0{,}25769 \cdots$$

also

$$\text{bd} = \frac{6 \cdot 0{,}25769}{0{,}98195} = 1{,}57 \text{ Fus}$$

$$= 18{,}84 \text{ Zoll.}$$

2. Ex. Es sei $r = 10$, $f = 1$, so ist

$$r + \frac{2}{3}f = 10{,}666 \cdots$$

$$\text{Cof}\ \frac{60^\circ}{r} = \text{Cof}\ 6^\circ = 0{,}9945218$$

$$\frac{r \cdot \text{Cof}\ \frac{60^\circ}{r}}{r + \frac{2}{3}f} = \frac{9{,}945218}{10{,}666} = 0{,}9324 \cdots$$

$$= \sin\ 68^\circ 49'$$

$$\text{und nun}\ \text{Cof}\left(\frac{60^\circ}{r} + 68^\circ 49'\right) = \text{Cof}\ 74^\circ 49' = 0{,}26190 \cdots$$

$$\text{also}\ \text{bd} = \frac{10{,}66 \cdot 0{,}2619}{0{,}9945} = 2{,}8 \text{ Fus.}$$

VIII.) Man ſieht wohl, daß die nach dieſer Methode ſich ergebende Höhe der Stoßſchaufel, ſchon wenn r etwa > 8 Fus iſt, für die Ausübung nicht wohl mehr zu gebrauchen iſt. In ſolchem Fall müßte man ſie merklich flacher legen, damit theils die Höhe nicht ſo übermäßig würde, theils aber auch der zwiſchen zwo Stoßſchaufeln bleibende Raum für den Durchgang des Waſſers, der Waſſerſack, nicht zu enge würde. Für die gewöhnlichen Werkleute iſt es indeſſen am beſten, eine ganz allgemeine Regel feſtzuſetzen, wornach ſie in allen Fällen verfahren können, und ich werde daher eine ſolche zu geben ſuchen.

VIIII.) Es ſei die Breite der Riegelſchaufel ab = q, die Höhe der Zelle bk = x, der Inhalt der ganzen Zelle (IV.) = T, und der Inhalt des in die Schaufeln beim Einſchuß fallenden Aufſchlagwaſſers = N; ferner heiſe der Winkel ζ, deſſen tang

$$= \frac{(f - q)}{x} + \frac{(f + q) \cdot N}{x \cdot T}$$

Kommt nun das Rad in Bewegung, ſo wird, wenn die Stelle d in eine gewiſſe Gegend gelangt, das Waſſer theils wegen der ſchiefen Lage der Zelle, theils aber auch wegen der Schwungkraft des Waſſers verſchüttet zu werden *anfangen* z. B. bei m, und ebenſo wird in einer gewiſſen Gegend *alles* Waſſer ausgeloſſen ſein z. B. in n. Setzt man nun den Winkel FCm (wo CF vertikal iſt) = φ, und FCn = φ″; iſt ferner die der Geſchwindigkeit des Theilriſſes zugehörige Höhe = δ, ſo hat man

$$\varphi = \zeta + \text{ang sin}\left(\frac{2\delta \cdot \sin \zeta}{r}\right)$$

$$\varphi'' = \text{ang tang}\frac{f - q}{x} + \text{ang sin}\left(\frac{2\delta \cdot \sin \zeta}{r}\right)$$

K. Hydr. S. 389. und 385. no. III. und hier no. XV.

X.) Man kann zur Berechnung des Effekts annehmen, daß alle Schaufeln ihr ſämmtliches Waſſer bis an eine gewiſſe Stelle ϱ zwiſchen m und n behalten, an dieſer Stelle aber ſolches auf einmal ausſchütten, und wenn ich FCϱ = φ′ ſetze, ſo wird

$$\text{sinv } \varphi' = \frac{\text{sinv } \varphi + \text{sinv } \varphi''}{2}$$

XI.) Das Aufſchlagwaſſer für iede Sec. heiſe A, ſein Gefälle bis in die Schaufel u und bis an die unterſte Stelle des Rades F heiſe a; das ſämmtliche Waſſer

Wasser in allen Zellen sehe man so an, als ob es um das Rad herum ohne weitere Dicke in der Mitte zwischen der innern und äusern Gränze der Felgen läge, so ist unter der gewöhnlichen Voraussetzung, daß sich iede Stelle des Theilrisses mit der Geschwindigkeit, welche der Höhe u zugehört, bewege, wenn ich den Effekt des Rades E nenne,

$$E = A \cdot (a - u - \tfrac{1}{2} f)$$

daferne iede Zelle ihr sämmtliches Wasser bis bei F behielte, oder daferne es verstattet wäre, den erwähnten Wasserring bis bei F anzunehmen; da aber solcher nur bis bei ϱ gerechnet werden darf (X.) so hat man, auf das Verschütten des Wassers mitgesehn,

$$E = A \cdot (a - u - \tfrac{1}{2} f - r \cdot \text{sinv } \varphi') \quad (\text{ħ}$$

XII.) u ist allemal eine Funktion von f; das Wasser fällt zwischen den Felgen selbst schon gewöhnlich noch um was tiefer als f, ausserdem steht die Rinne wenigstens einige Zolle über der Eingußzeile, die Rinne selbst ist einen oder etliche Zolle dick, und vom Boden des Gerinnes bis zum Mittelpunkt des Gefälles des über ihm herabschlüfenden Wassers, beträgt gleichfalls noch einige Zolle und oft noch mehr. Rechnet man nun alles das zusammen, wodurch u bestimmt wird, so kann man bei iedem anzulegenden Rad

$$u = \tfrac{1}{4} f + e$$

setzen, so daß e in der Ausübung als eine beständige Gröse angesehen werden kann, die sich nicht merklich abändert, wenn gleich f ganz verschiedene Werthe bekommt. Dieses nun statt u gesetzt, giebt aus (ħ. XI.)

$$E = A \cdot (a - e - 1{,}833 \cdot f - r \cdot \text{sinv } \varphi')$$

XIII.) Bewegte sich der Theilriß nicht mit der Geschwindigkeit, welche der Höhe u, sondern mit der, welche einer geringen Höhe δ zugehörte, so wirkte alsdann das Wasser zugleich durch den Stos mit dem Moment

$$kA \cdot (u + \delta - 2\sqrt{u\delta}) \cdot \sqrt{\frac{\delta}{u}}$$

wo k den bekannten beim Wasserstos vorkommenden Eulerschen Koefficienten bedeutet. Aber wegen der schiefen Richtung des Strahls und der Gestalt der Zellen setze ich hier nur $k = \frac{1}{2}$, und so erhält man aus (ħ. XI.)

$$E = A \cdot (a - u - \tfrac{1}{2} f + \left(\frac{u + \delta}{2} - \sqrt{u\delta}\right)\sqrt{\frac{\delta}{u}} - r \cdot \text{sv } \varphi')$$

XIIII.) Um nun die Einrichtung zu treffen, für welche E am gröſten wird, müſſen die in (9) erwähnten Gröſen beſtimmt werden. Man muß fürs erſte die Gröſen auſſer f ſo nehmen, daß der Werth von ζ alſo auch von tang ζ ſoviel möglich klein wird. Nun ſetze man $q = m \cdot f$, und $x = n \cdot f$, ſo iſt

$$\text{tang } \zeta = \frac{(1 - m) \cdot f}{n \cdot f} + \frac{(1 + m) \cdot f \cdot N}{f \cdot T}$$

aber

$$T = \frac{f + q}{2} \cdot x \cdot l \quad \text{(IV.)}$$

$$= \frac{(1 + m) \cdot f \cdot nf \cdot l}{2}$$

$$= \frac{(1 + m) \cdot n \cdot l}{2} \cdot f^2$$

mithin

$$\text{tang } \zeta = \frac{(1 - m) \cdot f}{nf} + \frac{(1 + m) \cdot f \cdot N}{\frac{(1 + m) \cdot n \cdot l}{2} \cdot f^2 \cdot f}$$

$$= \frac{1 - m}{2} + \frac{2N}{n \cdot l \cdot f^2} \quad (\text{☿}$$

wo man alſo, um tang ζ zu verkleinern, m und n groß genug nehmen muß. Man hat hierbei noch folgendes zu überlegen. Je gröſer man q nimmt, deſtomehr muß man ſich in Beſtimmung des Werths von x alſo auch von n einſchränken, damit der Waſſerſack nicht zu enge ausfalle, der bei einerlei x deſto enger wird, ie gröſer man q nimmt. Es erhellet auch, daß kleine Veränderungen im Werth von n, den Werth von tang ζ nicht ſoſehr abändern, wie kleine Veränderungen im Werth von m, und gar groſe Veränderungen von n ſind doch nicht verſtattet. Aus dieſen Urſachen nehme man allgemein

$$n = \tfrac{4}{3}$$

ſo iſt für die Ausübung noch gar wohl verſtattet

$$m = \tfrac{1}{2}$$

zu nehmen. Dadurch giebt ſich dann

tang

$$\text{tang } \zeta = \frac{1 - \frac{1}{2}}{4 : 3} + \frac{2N}{\frac{4}{3} \cdot l \cdot f^2}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1,5 \cdot N}{l \cdot f^2}$$

oder

$$= 0,375 + \frac{1,5 \cdot N}{l \cdot f^2}$$

XV. Ich nehme an, daferne das Rad nicht sehr unvollkommen angelegt ist, soll es so eingerichtet sein, daß bei einem sehr langsamen Gang des Rades, das Wasser nicht eher verschüttet zu werden anfängt, bis die Riegelschaufel ab wenigstens zur Hälfte ap von Wasser entledigt ist; oder mit andern Worten, es soll

$$N \text{ nicht} > l \times \Delta bdp$$

sein. Nun ist $\Delta bdp = \frac{x \cdot pb}{2} = \frac{\frac{4}{3}f \cdot \frac{1}{4}f}{2} = \frac{1}{6}f^2$; also soll

$$N \text{ nicht} > \frac{lf^2}{6}$$

$$\text{und } \frac{N}{l} \text{ nicht} > \frac{1}{6}f^2$$

sein. Oder weil, wie die Folge näher ergeben wird, f sehr selten über 1 Fus beträgt und in den meisten Fällen noch etwas kleiner genommmen wird, so kann man, wenn N in Kub. Fusen und l gleichfalls in Fusen ausgedruckt wird, sagen, es soll

$$\frac{N}{l} \text{ nicht} > \frac{1}{6}$$

sein. Der Gebrauch der Formel (VIIII.) setzt voraus, daß N nicht $> l \times \Delta abd$ ist, und findet also hier umsomehr statt, da nicht einmal $N > \frac{1}{2} l \times abd$ sein soll.

XVI.) Der Ausdruck $\frac{N}{l}$ nicht $> \frac{1}{6}$ hat nun die Bedeutung:

„iede Schaufel soll wenigstens 6 mal soviel Fuse lang sein, als sie Kub. „Fuse Aufschlagwasser auffangen soll."

Aus

Aus (XV.) erhellet aber, daß die Formeln in (VIIII.) immer noch gelten, wenn auch die Schaufeln nur 3mal soviel Fuse lang sind, als sie Kub. Fuse Wasser auffangen. Wirklich können auch Fälle in der Ausübung vorkommen, wo wegen des vielen Aufschlagwassers keine vollkommene Einrichtung des Rades verstattet ist, weil man es sonsten ungeheuer breit machen müste. Wäre z. B. $N = 2$ Kub. Fus, so könnte man doch das Rad nicht wohl breiter als $3 \cdot 2 = 6$ Fus machen. Für sehr kleine N hingegen versteht es sich, daß l noch viel $> 6N$ genommen werden könne. Z. B. für $N = 0{,}1$ K. F. würde man l doch viel $> 6 \cdot 0{,}1$ Fus nehmen, weil das Rad ohne sonstigen Nachtheil viel breiter sein kann, und die Schaufeln desto später ausgiesen, ie kleiner $\frac{N}{l}$ ist, wie aus (VIIII.) erhellet, wo T desto gröser wird, ie gröser man l annimmt.

XVII. Hier kommt es nun drauf an, die Berechnung des Werths von E so zu erleichtern, daß sich in iedem vorkommenden Falle, sobald nur $\frac{N}{l}$ bestimmt ist, der Werth von f ohne viele Mühe finden läßt, für welchen E am größten wird. Zu dieser Absicht ist es nöthig, hier für solche Werthe von $\frac{N}{l}$ und f, dergleichen in der Ausübung vorkommen könnten, die zugehörigen Werthe von ζ, wie sie sich aus (§ XIIII.) ergeben, zu berechnen. Es sei also

$$1.) \quad \frac{N}{l} = \frac{1}{3}$$

so ist

α) für $f = \frac{1}{8}$ Fus
$\zeta = 47°36'$

β.) für $f = 1$
$\zeta = 41°12'$

γ.) für $f = 1{,}2$
$\zeta = 35°50'$

δ.) für $f = 1{,}4$
$\zeta = 32°13'$

ε) für $f = 1{,}6$
$\zeta = 29°41'$

ζ.) für $f = 1{,}8$
$\zeta = 27°53'$

η.) für $f = 2$
$\zeta = 26°34'$

2.)

2.) $\frac{N}{l} = \frac{1}{2}$ giebt

α.) für f = $\frac{1}{8}$ ζ = 42°28′
β.) für f = 1 ζ = 36°53′
γ.) für f = 1,2 ζ = 32°25′
δ.) für f = 1,4 ζ = 29°31′
ε.) für f = 1,6 ζ = 27°32′
ζ.) für f = 1,8 ζ = 26°7′
η.) für f = 2 ζ = 25°8′

3.) $\frac{N}{l} = \frac{1}{3}$ giebt

α.) für f = $\frac{1}{8}$ ζ = 38°55′
β.) für f = 1 ζ = 34°1′
γ.) für f = 1,2 ζ = 30°15′
δ.) für f = 1,4 ζ = 27°50′
ε.) für f = 1,6 ζ = 26°12′
ζ.) für f = 1,8 ζ = 25°5′
η.) für f = 2 ζ = 24°14′

4.) $\frac{N}{l} = \frac{1}{4}$ giebt

α.) für f = $\frac{1}{8}$ ζ = 36°19′
β.) für f = 1 ζ = 32°0′
γ.) für f = 1,2 ζ = 28°45′
δ.) für f = 1,4 ζ = 26°41′
ε.) für f = 1,6 ζ = 25°18′
ζ.) für f = 1,8 ζ = 24°20′
η.) für f = 2 ζ = 23°37′

5.) $\frac{N}{I} = \frac{1}{7}$ giebt

α.) für $f = \frac{1}{8}$ $\zeta = 34°25'$

β.) für $f = 1$ $\zeta = 30°31'$

γ.) für $f = 1{,}2$ $\zeta = 27°39'$

δ.) für $f = 1{,}4$ $\zeta = 25°50'$

ε.) für $f = 1{,}6$ $\zeta = 24°38$

ζ.) für $f = 1{,}8$ $\zeta = 23°48'$

η.) für $f = 2$ $\zeta = 23°12'$

6.) $\frac{N}{I} = \frac{1}{8}$ giebt

α.) für $f = \frac{1}{8}$ $\zeta = 32°50'$

β.) für $f = 1$ $\zeta = 29°21'$

γ.) für $f = 1{,}2$ $\zeta = 26°48'$

δ.) für $f = 1{,}4$ $\zeta = 25°12'$

ε.) für $f = 1{,}6$ $\zeta = 24°9'$

ζ.) für $f = 1{,}8$ $\zeta = 23°24'$

η.) für $f = 2$ $\zeta = 22°52'$

7.) $\frac{N}{I} = \frac{1}{9}$ giebt

α.) für $f = \frac{1}{8}$ $\zeta = 31°36'$

β.) für $f = 1$ $\zeta = 28°26'$

γ.) für $f = 1{,}2$ $\zeta = 26°8'$

δ.) für $f = 1{,}4$ $\zeta = 24°23'$

ε.) für $f = 1{,}6$ $\zeta = 23°45'$

ζ.) für $f = 1{,}8$ $\zeta = 23°6'$

η.) für $f = 2$ $\zeta = 22°37'$

8.)

8.) $\frac{N}{l} = \frac{1}{10}$ giebt

α.) für $f = \frac{1}{6}$ $\zeta = 30°35'$
β.) für $f = 1$ $\zeta = 27°42'$
γ.) für $f = 1{,}2$ $\zeta = 25°36'$
δ.) für $f = 1{,}4$ $\zeta = 24°18'$
ε.) für $f = 1{,}6$ $\zeta = 23°26'$
ζ.) für $f = 1{,}8$ $\zeta = 22°51'$
η.) für $f = 2$ $\zeta = 22°25'$

9.) $\frac{N}{l} = \frac{1}{20}$ giebt

α.) für $f = \frac{1}{6}$ $\zeta = 25°47'$
β.) für $f = 1$ $\zeta = 24°14'$
γ.) für $f = 1{,}2$ $\zeta = 23°8'$
δ.) für $f = 1{,}4$ $\zeta = 22°27'$
ε.) für $f = 1{,}6$ $\zeta = 22°1'$
ζ.) für $f = 1{,}8$ $\zeta = 21°43'$
η.) für $f = 2$ $\zeta = 21°28'$

Soweit habe ich diese Zahlen nach der obigen Formel berechnet, und man kann nun die zu $\frac{N}{l} = \frac{1}{11}; \frac{1}{12}; \frac{1}{13}; \ldots \frac{1}{19}$ gehörigen Werthe von ζ für $f = \frac{1}{6}; 1; 1{,}2; 1{,}4; 1{,}6; 1{,}8$; und 2 für die Ausübung ganz sicher so berechnen, daß man annimmt, die zu $\frac{N}{l} = \frac{1}{10} \ldots \frac{1}{20}$ gehörigen Werthe von ζ für $f = \frac{1}{6}$ seien Glieder einer abnehmenden arithmetischen Reihe, deren erstes Glied $= 30°35'$ letztes $= 25°47'$ und die Zahl der Glieder $= 11$ ist, und ebenso für $f = 1$, 1,2; u. s. w. da sich dann die Differenz der Glieder in dieser Reihe nach Erl. d. Anal. endl. Gr. S. 5. leicht berechnen läßt. Auf diese Art habe ich nun die übrigen Werthe von ζ noch eingeschaltet, und alle diese zusammengehörige Werthe in nachstehende Tafel gebracht

Siehe Tab. I.

XVIII.) Ich will fürs erſte den Fall vornehmen, da man $\delta = u$ nimmt. Sollte es nun auch nicht verſtattet ſein, zur Berechnung des Werths von E

$$u = 1{,}33 \cdot f + \tfrac{1}{2}$$

in Fuſen anzunehmen, ſo iſt ſolches doch offenbar für die Berechnung der Werthe von φ und φ'' hier gar wohl verſtattet. Das giebt dann für $\delta = u$,

$$\begin{aligned} 2\delta &= 2 \cdot (1{,}33 \cdot f + \tfrac{1}{2}) \\ &= 2{,}66 \cdot f + 1 \end{aligned}$$

und nun in (VIIII.)

$$\varphi = \zeta + \text{ang sin}\left(\frac{(2{,}66 \cdot f + 1) \cdot \sin\zeta}{r}\right)$$

$$\varphi'' = \text{ang tang}\frac{(1 - \frac{1}{2}) \cdot f}{1{,}33 \cdot f} + \text{ang sin}\left(\frac{(2{,}66 \cdot f + 1) \cdot \sin\zeta}{r}\right)$$

$$= 20°34' + \text{ang sin}\left(\frac{(2{,}66 \cdot f + 1) \cdot \sin\zeta}{r}\right)$$

Hiernach habe ich für $\frac{N}{l} = \frac{1}{12}$ folgende Tafel berechnet.

Siehe Tab. II.

XVIIII.) Weiter habe ich dieſe Tafel nicht für nöthig erachtet zu berechnen. Aus ihr erkennt man ſchon bei einiger Ueberlegung, daß hier der Effekt oder der Werth von E deſto kleiner wird, ie gröſer man f nimmt. Es iſt nämlich allemal $r \cdot \text{sinv} \cdot \varphi'$ für die verſchiedenen Werthe von f nur ſehr wenig verſchieden, da hingegen $u + \frac{1}{2} f$, wo u ſelbſt eine Funktion von f iſt, ſich bei ieder Aenderung von f merklich abändert. Ich will dieſes nur durch ein Beiſpiel erläutern:

1.) Es ſei für $\frac{N}{l} = \frac{1}{12}$, $r = 10$ und $f = 1$ Fus, ſo iſt nach der Tafel

$$\begin{aligned} \varphi &= 36°35' \\ \varphi'' &= 30°9' \\ \text{alſo sinv } \varphi &= 1 - \text{Cos}\varphi = 1 - 0{,}80299 \\ &= 0{,}1970 \\ \text{sinv } \varphi'' &= 1 - \text{Cos}\varphi'' = 1 - 0{,}86471 \\ &= 0{,}1352 \end{aligned}$$

und

Werthe von f	$\frac{1}{3}$	
$\frac{5}{6}$ Fus	47° 36′	4
1, 0.	41° 12′	3
1,2.	35° 50′	3
1,4.	32° 13′	2
1,6.	29° 41′	2
1, 8.	27° 53′	2
2, 0	26° 34′	2

Digitized by Google

Digitized by Google

und nun

$$\text{finv } \varphi' = \frac{\text{finv } \varphi + \text{finv } \varphi''}{2} = \frac{0,3322}{2}$$

$$= 0,1661$$

und daher

$$r \cdot \text{finv } \varphi' = 1,661$$

Das gäbe also in (XII.)

$$E = A \cdot (a - e - 1,833 - 1,661)$$
$$= A \cdot (a - e - 3,5)$$

2.) Es sei nun $f = 1,4$; das übrige wie zuvor, also

$$\varphi = 34°58'$$
$$\varphi'' = 31°37'$$

so ist

$$\text{finv } \varphi = 1 - \text{Cos}\varphi = 1 - 0,81948 = 0,18051$$
$$\text{finv } \varphi'' = 1 - \text{Cos}\varphi'' = 1 - 0,85157 = 0,14842$$

also

$$\text{finv } \varphi' = \frac{0,32893}{2} = 0,1644$$

und $r \cdot \text{finv } \varphi' = 1,644$ sehr wenig vom vorigen Werth verschieden, folglich

$$E = A \cdot (a - e - 1,833 \cdot 1,4 - 1,644)$$
$$= A \cdot (a - e - 4,21)$$

geringer als vorhin.

XX.) Da bei einerlei $\frac{N}{l}$ das Wasser doch einen desto kleinern Theil der Zellen ausfüllt, je gröser f ist, und solches bei einer kleinern Veränderung von f, die etwa nur einen oder zween Zolle beträgt, schon sehr merklich ist, weil sich der Inhalt der Zellen, wie das Quadrat von f verhält, so scheint es anfangs wohl nicht richtig zu sein, daß der Werth von finv φ so wenig veränderlich, ja wenn man solchen z. B. auch für $f = 1,6$ berechnet hätte, für das gröfere f gar noch gröser als für das kleinere erschienen wäre. Die Ursache davon liegt aber darin, daß ich $\delta = u$ und also als eine Funktion von f angenommen habe, wodurch dann finv φ' selbst eine Funktion von f wird, so daß

sinv φ' wachsen muß, wenn f wächst. Je gröser nämlich nun f wird, desto gröser wird auch die der Geschwindigkeit des Rades zugehörige Höhe $\delta = u$, und also desto gröser des in den Zellen liegenden Wassers Schwungkraft, die es zum Herausfliesen nöthigt. Wenn also durch den grössern Inhalt der Inhalt der Zellen gewonnen wird, so kann durch die dadurch vergröserte Geschwindigkeit des Rades auch wieder soviel verlohren gehen. Und man behält also im Werth von E noch den durch den vergröserten Werth von $u + \frac{1}{2} f$ vermehrten. Verlust.

XXI.) Ich folgere hieraus:

„Wenn sich das Rad, wobei $\frac{N}{l}$ festgesetzt ist, mit der der Höhe u zu-
„gehörigen Geschwindigkeit drehen soll, so ist die Breite der Felgen desto
„vortheilhafter, je schmaler sie ist."

Weil es nun hierbei auf einen Zoll nicht ankommt, und sehr schmale Felgen theils wegen der Zusammenfügung und Festigkeit, theils wegen des beim Einschiesen des Aufschlagwassers zu befürchtenden Versprützens nicht räthlich sind, so würde ich für diesen Fall die Felgen allemal 10 Zoll breit zu nehmen rathen.

XXII.) Da es aber nicht nur dem Moment (XIII.) völlig gemäß ist, δ kleiner als u zu nehmen, und über das φ und φ'' also auch sinv φ' desto kleiner wird, je kleiner δ ist, so ist es offenbar weit vortheilhafter, δ gar nicht zu einer Funktion von u und f zu machen, sondern sie als eine beständige Gröse zu betrachten, deren Werth man allemal dem Zweck, wozu man das Rad gebrauchen will, gemäß festsetzt, und der dann nicht wächst, wenn gleich f gröser wird. Für den Gebrauch, den man auf Salz- und Bergwerken und überall, wo Wasser aufgefördert werden soll, von den oberschlächtigen Rädern macht, setzt man am füglichsten, wie ich oben erwähnt habe,

$$\delta = 1{,}131 \text{ Fus}$$

daher ich hier auch diesen Werth beibehalten will, da ohnehin auch ein paar Zolle im Werth von δ, wenn solcher nur für jedes f unverändert bleibt, das Resultat der jetzigen Untersuchung nicht einmal merklich abändern.

XXIII.) So hätte man also

$$\varphi = \zeta + \text{ang sin}\left(\frac{2{,}262 \cdot \sin \zeta}{r}\right)$$

$$\varphi'' = 20^\circ 34' + \text{ang sin}\left(\frac{2{,}262 \cdot \sin \zeta}{r}\right)$$

Wei

Weil übrigens ζ in den allermeiſten Fällen der Ausübung, unter 30° beträgt, ſo kann man, ohne daß φ und φ' dadurch merklich abgeändert werden,

$$\text{ang sin}\left(\frac{2{,}262 \cdot \sin \zeta}{r}\right) = \frac{2{,}262}{r} \cdot \zeta$$

ſetzen, und ſo erhält man

$$\varphi = \left(1 + \frac{2{,}262}{r}\right)\zeta$$

$$\varphi'' = 20°34 + \frac{2{,}262}{r} \cdot \zeta$$

alſo $\text{sinv}\ \varphi' =$

$$\frac{\text{sinv}\left(1 + \frac{2{,}262}{r}\right) \cdot \zeta + \text{sinv}\left(20°34' + \frac{2{,}262}{r} \cdot \zeta\right)}{2}$$

oder weil $\text{sinv} = 1 - \text{Cos}$ iſt,

$$\text{sinv}\,\varphi' = 1 - \tfrac{1}{2}\left(\text{Cos}\left(1 + \frac{2{,}262}{r}\right) \cdot \zeta + \text{Cos}\left(20°34' + \frac{2{,}262}{r} \cdot \zeta\right)\right)$$

XXIIII.) Uebrigens fällt in die Augen, daß in (XIII.) die Gröſe $\left(\frac{u + \delta}{2} - \sqrt{u\delta}\right) \cdot \sqrt{\frac{\delta}{u}}$ allemal ſo gering iſt, daß a mit $a + \left(\frac{u + \delta}{2} - \sqrt{u\delta}\right) \cdot \sqrt{\frac{\delta}{u}}$ für einerlei gehalten werden, und daher auch hier die Formel für E aus (XI.) beibehalten werden kann.

XXV.) Sind nun in einem vorkommenden Fall $\frac{N}{l}$ und r beſtimmt, ſo hat man nichts weiter nöthig, als vermittelſt der für ζ berechneten Tafel in (XVII.) nach den Formeln (XXIII und XI oder XII.) für jeden der 6 Werthe von f den zugehörigen von E zu berechnen, um zu ſehen, für welches f man den gröſten Werth von E erhält. Man ſieht wohl, daß wenigſtens zu dieſer bloſen Vergleichung der Werthe von E allemal die Formel (XII.) gebraucht werden kann. Da ich die Formeln ſoviel möglich für die Ausübung brauchbar zu machen geſucht, und ihren Gebrauch überdas noch durch die Tafel (XVII.) ſehr erleichtert habe, ſo habe ich es für überflüſſig gehalten, hier noch weitere Tafeln zu berechnen. Ich will nur noch die Sache durch ein Paar Beiſpiele erläutern.

XXVI.)

XXVI.) 1 Ex. Es sei r = 10 F. und $\frac{N}{l} = \frac{1}{12}$, so ist

1.) für f = 1

finv φ' = 1 — $\frac{1}{2}$ (Cos 33°6′ + Cos 26°40′)

= 1 — 0,86567 . . .

= 0,13432

also r . finv φ' = 1,343 Fus

2.) für f = 2

finv φ' = 1 — $\frac{1}{2}$ (0,88915 + 0,90195)

= 1 — 0,8955

= 0,1044

also r . finv φ' = 1,044 Fus.

Demnach aus (XII.)

für f = 1

E = A . (a — e — 1,833 — 1,343)

= A . (a — e — 3,176)

und für f = 2

E = A . (a — e — 3,666 — 1,044)

= A . (a — e — 4,710)

also im letzten Fall, zumal wenn a nicht gar gros ist, beträchtlich kleiner als im ersten.

2. Ex. Es sei r = 18, und $\frac{N}{l} = \frac{1}{8}$; so ist

1.) für f = 1

finv φ' = 0,140

und r . finv φ' = 2,52

2.) für f = 1,2

finv φ' = 0,121

und r . finv φ' = 2,17

3.) für f = 2

r . finv φ' = 1,69

Dem.

Demnach 1.) für $f = 1$

$$E = A \cdot (a - e - 2{,}1 - 2{,}17)$$
$$= A \cdot (a - e - 4{,}353)$$

2.) für $f = 1{,}2$

$$E = A \cdot (a - e - 2{,}1 - 2{,}17)$$
$$= A \cdot (a - e - 4{,}27)$$

3.) für $f = 2$

$$E = A \cdot (a - e - 3{,}666 - 1{,}690)$$
$$= A \cdot (a - e - 5{,}356)$$

also der Effekt für $f = 2$ am kleinsten, und für $f = 1{,}2$ am gröſten, und man müſte also in diesem Fall die Felgen etwa 14 bis 15 Zoll breit machen.

3. Ex. Es sei $r = 10$ und $\frac{N}{l} = \frac{1}{3}$, so ist

für $f = \frac{1}{2}$; $r \cdot \text{sinv } \varphi' = 3{,}104$ also $E = A \cdot (a - e - 4{,}631)$
„ $f = 1$; $r \cdot \text{sinv } \varphi' = 2{,}484$ „ $E = A \cdot (a - e - 4{,}317)$
„ $f = 1{,}2$; $r \cdot \text{sinv } \varphi' = 2{,}012$ „ $E = A \cdot (a - e - 4{,}211)$
„ $f = 1{,}4$; $r \cdot \text{sinv } \varphi' = 1{,}721$ „ $E = A \cdot (a - e - 4{,}287)$
„ $f = 1{,}6$; $r \cdot \text{sinv } \varphi' = 1{,}531$ „ $E = A \cdot (a - e - 4{,}463)$
„ $f = 1{,}8$; $r \cdot \text{sinv } \varphi' = 1{,}403$ „ $E = A \cdot (a - e - 4{,}702)$
„ $f = 2$; $r \cdot \text{sinv } \varphi' = 1{,}314$ „ $E = A \cdot (a - e - 4{,}980)$

also wieder für $f = 1{,}2$ der Werth von E oder der Effekt am gröſten. Machte man in diesem Fall die Felgen nur 10 Zoll breit, so könnte dadurch der Effekt merklich vermindert werden. Wäre z. B. $a = 8$, $e = \frac{1}{2}$ Fus, und das Rad sollte 20schuhig mittelschlächtig werden, so wäre

für 10 Zoll breite Felgen

$$E = A \cdot (8 - 0{,}5 - 4{,}63) = 2{,}87 \cdot A$$

für 14 bis 15 Zoll breite Felgen

$$E = A \cdot (8 - 0{,}5 - 4{,}21) = 3{,}29 \cdot A$$

also der Effekt im letztern Fall um mehr als $\frac{1}{7}$ gröſer als im erſtern.

XXVII.) An ſich betrachtet bleibt bei einem gegebenen Gefälle die Höhe des dazu anzulegenden oberſchlächtig gebauten Rades immer noch willkührlich, weil es nicht gerad ganz ſondern auch zum Theil oberſchlächtig ſein kann. Ich behalte nämlich oberſchlächtig als einen allgemeinen Namen bei, und begreife die mittelſchlächtigen, wo das Waſſer entweder über oder unter des Rades Mittelpunkt einfällt, mit darunter.

XXVIII.) Hierher gehören nun auch noch die Fragen, in welchen Fällen man mit Vortheil oberſchlächtige Räder gebrauchen könne, und welches ihre vortheilhafteſte Höhe bei einem gegebenen Gefälle ſei?

XXVIIII.) Wenn k den bekannten Eulerſchen Koefficienten bedeutet, ſo iſt, wenn der gröſte Effekt des unterſchlächtigen Rades E′ heiſt,

$$E' = k \cdot \tfrac{4}{17} \cdot Aa$$

und wenn man die Einrichtung ſo trift, daß die Schaufeln groß genug werden, ſo kann man gar wohl

$$E = \tfrac{1}{3} Aa$$

ſetzen. Soll nun ein oberſchlächtiges Rad ſtatt eines unterſchlächtigen angelegt werden, ſo muß

$$E > E'$$

d. i.

$$A \cdot \left(a - (e + 1{,}833 \cdot f + r \cdot \operatorname{sinv} \varphi')\right) > \tfrac{1}{3} Aa$$

alſo

$$e + 1{,}833 \cdot f + r \cdot \operatorname{sinv} \varphi' < \tfrac{4}{3} Aa$$

oder

$$\tfrac{1}{4} e + 2{,}291 \cdot f + \tfrac{1}{4} r \cdot \operatorname{sinv} \varphi' < a$$

ſein. Wenn ich nun weiter annehme, daß bei einer vortheilhaften Einrichtung, e nicht viel von 0,5 und $r \cdot \operatorname{sinv} \varphi'$ nicht viel von 1,5 Fus verſchieden ſein wird, und nun noch $f = 1$ ſetze, ſo ergiebt ſich, daß

$\frac{1}{4}$

$$\tfrac{1}{2} \cdot 0{,}5 + 2{,}291 + \tfrac{1}{2} \cdot 1{,}5 < a \quad \text{d. i.}$$
$$0{,}625 + 2{,}291 + 1{,}875 < a$$

sein, also wenigstens $a > 4{,}791$ sein müsse. Und weil die Werthe von e und $r \cdot \operatorname{sinv} \varphi'$ hier noch um einige Zolle ungewiß, auch überdas oberschlächtige Räder schwerer sind, und daher an den Wellzapfen mehrere Friktion leiden als unterschlächtige, so kann man die Regel mit völliger Sicherheit für die Ausübung so abfassen:

„man soll nicht eher oberschlächtig gebaute Räder anlegen, bis man ein „Gefälle von etwa 5 Fusen hat."

XXX.) Da bei einerlei a, e, N, l und f der Werth von $r \cdot \operatorname{sinv} \varphi'$ desto kleiner also der von E desto gröser wird, ie kleiner r ist, (obgleich der Unterschied bei verschiedenen r doch deswegen sosehr gros nicht ist, weil r im Werth von $\operatorname{sinv} \varphi'$ als Nenner eines Bruchs vorkommt), so giebt sich daraus die Regel:

„die Höhe eines oberschlächtig gebauten Rades, soll der Höhe des Ge„fälles so nahe als möglich kommen."

wogegen in der Ausübung nur gar zu häufig gefehlt wird. Es folgt hieraus, daß man allemal, wo es angeht, die mittelschlächtigen Räder vermeiden und lieber ganz oberschlächtige anlegen müsse.

XXXI.) Um zu zeigen, wieviel man dadurch verliehren kann, daß man ein mittelschlächtiges Rad statt eines oberschlächtigen gebraucht, will ich das Beispiel in (XXVI. am Ende) vornehmen, wo a 8 Fus betrug. Legte man zu diesem Gefälle ein ganz oberschlächtiges Rad an, so wäre der Halbmesser des Theilrisses r etwa 3 Fus, weil es in der Bestimmung von r auf einige Zoll nicht ankommt, wenn nur a unverändert bleibt. Gebraucht man nun diesen Werth von r, so ist für $f = 1{,}2$ Fus,

$$\operatorname{sinv} \varphi' = 0{,}5348$$
$$\text{also } r \cdot \operatorname{sinv} \varphi' = 1{,}6044$$
$$\text{und } E = A \cdot (8 - 0{,}5 - 3{,}803)$$
$$= 3{,}69 \cdot A$$

ſchon merklich gröſer als für das dort erwähnte mittelſchlächtige Rad. Man muß aber noch überdas bedenken, daß, wie eine kleine Vergleichung ohne nähere Rechnung ſchon zeigt, beim Gebrauch des ganz oberſchlächtigen Rades, weil da r · ſinv φ' ſoviel kleiner wird, wirklich f = $\frac{1}{6}$ vortheilhafter als f = 1,2 iſt. Die Rechnung giebt für f = $\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} \text{ſinv } \varphi' &= 0{,}657 \\ \text{alſo } r \cdot \text{ſinv } \varphi' &= 1{,}971 \\ \text{und } E = A \cdot (8 &- 0{,}5 - 3{,}498) \\ &= 4 \cdot A \end{aligned}$$

dagegen war in (XXVI.) beim mittelſchlächtigen

$$E = 3{,}29 \cdot A$$

alſo um mehr als $\frac{1}{7}$ geringer als beim ganz oberſchlächtigen. Nicht zu gedenken, daß ein mittelſchlächtiges Rad allemal bei einerlei Gefälle gröſer, folglich ſchwerer als ein ganz oberſchlächtiges iſt, und daher bei erſterem die Friktion am Wellzapfen gröſer als bei letzterem ſein muß.

XXXII.) Ich muß nun noch einige Bemerkungen über die ſchlechte Wirkung der gewöhnlichen mittelſchlächtigen Räder und über die Art, dieſen Mangel abzuhelfen, beibringen.

XXXIII.) Da man bei einem Gefälle von 7 Fus allemal ſchon ein ganz oberſchlächtiges Rad anlegen kann, ſo darf man annehmen, daß für mittelſchlächtige Räder a iedesmal zwiſchen 5 und 7 Fuſen liege. Es iſt alſo für mittelſchlächtige Räder, zumal wenn ſie nicht breit genug ſind, r · ſinv φ' ſchon ein beträchtlicher Theil von

$$a - e - 1{,}833 \cdot F.$$

und wird in den meiſten Fällen über $\frac{1}{4}$ davon betragen. Es ſei z. B.

$$\begin{aligned} r \cdot \text{ſinv } \varphi' &= \tfrac{4}{7} \\ e &= \tfrac{1}{2} \\ f &= \tfrac{1}{6} \\ \text{und } a &= 5\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

alles

alles in Fuſen, ſo iſt

$$a - e - 1{,}833 \cdot f = 5\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} - 1{,}833 \cdot \tfrac{1}{6}$$
$$= 3{,}472$$

wovon $r \cdot \text{ſinv } \varphi' = \frac{1}{3}$ ſchon $\frac{1}{216}$ alſo über ein Drittheil beträgt.

Gleichwohl denkt man bei einer vorläufigen Ueberrechnung des Effekts ſo ſelten an $r \cdot \text{ſinv } \varphi'$, und es iſt daher nicht zu bewundern, wenn man bei der gewöhnlichen Einrichtung der mittelſchlächtigen Räder meiſtens einen beträchtlich geringern Effekt erhält, als der zu nachläßig darüber gemachte Ueberſchlag verſprach.

XXXIII.) Indeſſen müßte doch bei einem gehörigen Gefälle (XXVIIII.) der Effekt immer gröſer ausfallen, als bei einem **unterſchlächtigen** Rad, und dennoch hat man ungemein viele Beiſpiele, wo dergleichen gewöhnliche mittelſchlächtige Räder auch nach der ſorgfältigſten Berechnung einen wider alle Erwartung geringen Effekt geleiſtet haben. Herr **Silberſchlag** klagt hierüber **Hydrotechnik** II. Th. S. 205. u. f. giebt auch mehrere Urſachen dieſer Erſcheinung an, die mir aber doch zur Erklärung einer ſo auffallenden Begebenheit, da der Effekt des von ihm erwähnten Rades ſelbſt nach einiger Verbeſſerung nur = 9 war, und nachher bei weitern Verbeſſerungen bis auf 30 ſtieg, noch nicht hinreichend ſcheinen. Wirklich ſcheint auch Hrn. S. noch eine von den Haupturſachen des ſo ſehr verminderten Effekts entwiſcht zu ſein. Wenn nämlich das Waſſer bei dq in die Schaufeln ſchieſen ſoll, und das Gerinne ſo angelegt iſt, daß das Waſſer in ſeinem geraden Lauf gegen das Rad hinſtröhmt, ſo ſtößt ſolches mit ziemlicher Gewalt gegen die **ſchief geſtellte Stosſchaufel** bd, und ſtrebt auf ſolche Art das Rad nach der Richtung qd oberwärts zu drehen, ſo wie bei einer Windmühle der Wind auf die Windflügel, oder wie das Waſſer auf die ſogenannten **Muſchelräder** wirkt. Hätte das Rad keinen bretternen Boden, daß alſo das Waſſer gleich durchfallen könnte, ſo würde das Rad wirklich auf ſolche Art nach qd oberwärts gedreht werden. Da nun durch die von Hrn. S. vorgeſchlagene Einrichtung des Gerinnes auch dieſe Urſache des verminderten Effekts gehoben wird, ſo mußte freilich zuletzt der Effekt ganz anders ausfallen als anfangs. Es ſoll nämlich die horizontale Rinne vorne von oben herab nach dem Boden zu, zum Theil verſchloſſen und auf ſolche Art das Waſſer genöthigt werden, ſich durch eine unten gelaſſene Oefnung in die Schaufeln des Rades hinabzuſtürzen. Auch will Hr. S. man ſoll das Waſſer zunächſt **unter** der Mitte des Rades

einfallen lassen; wenn aber das Gerinne die nur erwähnte Einrichtung bekommt, so halte ich solches bei den gewöhnlichen mittelschlächtigen Rädern wegen (XXX; XXXI.) nicht für räthlich.

XXXV. Hr. S. giebt aber zur Vergröserung des Effekts noch eine besondere Einrichtung bei mittelschlächtigen Rädern an, die hier noch bemerkt werden muß. Sie besteht darin, daß der mit Wasser beladene Theil des Rades in einem krummen Gerinne laufe, welches sich so genau, als ohne Friktion zu verursachen möglich ist, an das Rad anschliesen muß. Da durch den kleinen Spielraum, der auf solche Art zwischen dem Kranze und dem krummen Gerinne bleibt, nur wenig Wasser durchfliesen kann, so erhellet, daß, besonders wenn N gros ist, bei dieser Einrichtung nur ein kleiner Theil von N aus den Schaufeln verschüttet werden kann, und daher $r \cdot \sin v\, \varphi'$ ziemlich verkleinert werden muß. Nur muß, wenn die krumme Rinne Nutzen leisten soll, **fürs erste** N oder A gros genug sein, weil widrigenfalls das wenige Aufschlagwasser Platz genug hätte, durch den Spielraum ungehindert abzufliesen. Aus dieser Ursache möchte wohl diese Einrichtung von keinem besondern Nutzen sein, wenn nicht wenigstens A = 6 Kub. Fus wäre. **Fürs andere** ist es bei dieser Einrichtung besser, das Wasser zunächst **unter** der Mitte des Rades einlaufen zu lassen, weil es durch den etwanigen horizontalen Stos der Bewegung des Rades noch förderlich ist und der Umstand (XXX.) hier gröstentheils wegfällt. **Fürs dritte** muß der Spielraum in der krummen Rinne möglichst verkleinert, und daher das Rad nicht gar breit gemacht werden, aber eben deswegen auch etwas breite Felgen bekommen, wie auch schon wegen der ersten und zwoten Regel erfodert wird. Ich würde daher bei dieser Einrichtung die Felgen niemals **unter** einen Fus breit zu machen rathen. Diesen Gründen gemäs, würde ich für dergleichen Räder die Formel für E so einrichten. Der Abstand des Kranzes von der krummen Rinne heise e, die Höhe des Querschnitts vom Wasser beim Herabschiesen aus der horizontalen Rinne sei h, so seze ich

$$E = A \cdot \left(a - e - 1{,}833 \cdot f - \frac{e}{h} \cdot r \cdot \sin v\, \varphi' \right)$$

wodurch dann der von $r \cdot \sin v\, \varphi'$ noch übrig bleibende Theil, nicht ganz weggeworfen, und aus der Natur der Sache doch der Wahrheit nahe genug bestimmt wird.

XXXVI.) Bei dieser Einrichtung wird also der Effekt eines mittelschlächtigen Rades offenbar gröser als für das ganz oberschlächtige, wie solches gewöhn-

wöhnlich eingerichtet ist, so daß z. B. bei einem Gefälle von 8 F ein so eingerichtetes mittelschlächtiges Rad leicht um $\frac{1}{7}$ mehr leisten kann, als ein gewöhnliches ganz oberschlächtiges. Wenn also Hr. S. a. a. O. S. 208. sagt:

„Die Erfahrung steht mir zur Seiten, wenn ich behaupte, daß diese Räder „alle übrige an Stärke und Geschwindigkeit weit übertreffen."

so stimmt solches mit der Theorie vollkommen überein.

XXXVII) Aber ich sehe nicht, warum man nicht auf den Einfall gekommen ist, auch um die untere Hälfte eines ganz oberschlächtigen Rades ein eben solches krummes Gerinne zu legen; da nämlich das Wasser erst in der untern Hälfte verschüttet zu werden anfängt, so würde ein solches Gerinne hier eben den Nutzen leisten, wie bei mittelschlächtigen, und so hätte man auch für ganz oberschlächtige Räder

$$E = A \cdot \left(a - e - 1{,}833 \cdot f - \frac{e}{h} \cdot r \cdot \text{sinv } \varphi' \right)$$

und nun bleibt es also doch nach (XXX. und XXXI.) immer noch vortheilhafter ein ganz oberschlächtiges als ein mittelschlächtiges zu gebrauchen, wenn beide mit krummen Gerinnen versehen sind.

XXXVIII.) Ich muß nur eine Erinnerung, die diese Einrichtung betrift, hier beibringen. Weil das Wasser in der untern Hälfte des Rades von allen Seiten verschlossen ist, so ist begreiflich, wenn eine Zelle unter der krummen Rinne hervorkommt und nun ihr Wasser sämmtlich fallen lassen sollte, daß alsdann besonders bei vielem Aufschlagwasser es leicht sein kann, daß das Wasser nicht aus der Schaufel fallen kann, wegen des luftleeren oder wenigstens mit verdünnter Luft angefüllten Raums, der über dem Wasser in der Schaufel, während daß solche durch das Gerinne streicht, entstehen könnte. Und dieser Umstand könnte machen, daß das Rad gar keinen Effekt leistete. Diesem Uebel vorzubeugen brauchte man nur gleich unter ieder Riegelschaufel, wo das Wasser ohnehin nicht hintritt, den Boden des Rades zu durchbohren, damit die Luft von aussen in die Schaufel zwischen das darin befindliche Wasser und den Boden des Rades hineintreten, folglich kein luftleerer oder auch nur mit verdünnter Luft angefüllter Raum entstehen könnte. So zeigt die Theorie Hindernisse, die entstehen können und zu gleicher Zeit die Mittel, sie zu heben. In der That hat die Erfahrung dieses Hindernis zuerst gelehrt, und man findet hiervon bei Hrn. S. a. a. O. S. 206. ein sehr merkwürdiges Beispiel, wo

ein

ein mit einer krummen Rinne angelegtes mittelschlächtiges Rad mit verschlossenem Boden, wiewohl A = 12 Kub. Fus war, nicht nur den Mühlstein zu betreiben völlig unvermögend war, sondern sich überdas noch mit einer Gewalt von 2 Centnern aller Bewegung widersetzte, aber sogleich die Mühle in Gang brachte, nachdem man dem Boden des Rades auf die beschriebene Art durchbohrt hatte.

§. 371.

Zu den Salzwerksmaschinen gehören vorzüglich auch die Windmühlen. Ich finde aber nicht, wie sich zu einigem Nutzen Rechnungen darüber anstellen lassen, weil wir die Gröse des Windes gar nicht in unserer Gewalt haben, und daher ihre Einrichtung gröstentheils willkührlich bleibt. Ihres grosen Nutzens wegen, sollte indessen ieder Salzwerksverständige ihren Bau kennen, dessen Beschreibung allerdings hier noch eine Stelle verdiente, wenn ich nicht auf meines Bruders ausführlichere Anleitung zur Anlegung ꝛc. der Salzwerke verweisen könnte. Ausserdem gehören zu den Bewegungskräften auf Salzwerken, deren man sich zur Betreibung der Gradirgebäude bedient, die Gradirer mit den Leckschaufeln, worüber ich vor einiger Zeit eine besondere Abhandlung an die Kurfürstliche Mainzische Akademie der Wissenschaften zu Erfurth überschickt habe. Ueber die gleichfalls hierher gehörige Salzwerksmaschine des Hrn Kammerraths Schrader habe ich mich schon in der Vorrede erklärt. Bei ausserordentlich hohem Gefälle kann man sich auch der Wassersäulenmaschinen bedienen, deren Effekt mit dem Effekt des oben beschriebenen Segnerischen Wasserrads einerlei ist; aber wegen der vielen dabei nöthigen Vorrichtungen, die in der Ausübung diesen Effekt wieder vermindern, werden solche so wenig wie das Segnerische Rad die oberschlächtigen Wasserräder verdrängen. Ihre Beschreibung findet man in den für Salz- und Bergwerksmänner unentbehrlichen bekannten Werk meines verehrungswürdigen Freundes Hrn. Oberkammerraths Cancrinus, und in des zufrühe verstorbenen Hrn. Delius Bergbaukunst, die nur in Absicht auf Theorie einige Berichtigungen nöthig hätte.

Alpha-

Alphabetiſches Verzeichnis
der vornehmſten Sachen und Wörter, welche in der Käſtneriſchen höhern Mechanik und Hydrodinamik, desgleichen in dieſen Erläuterungen vorkommen.

M. bedeutet die Mechanik, und die beigeſetzte Zahl bezieht ſich auf die Seiten. H. bedeutet die Hydrodinamik und E. dieſe Erläuterungen, die bei H. und E. ſtehende Zahlen aber gehen auf die §§.

A.

Anziehung, von Kraft gebraucht M. 55. Geſetz derſelben daſ. gegenſeitige bei den Weltkörpern M. 307. angezogener Körper Geſchwindigkeit durch eine allgemeine Formel beſtimmt M. 56. aus dem Geſetz der anziehenden Kraft die Bahn des Körpers zu beſtimmen M. 151.

Ausfluß des Waſſers durch ein Rechteck H. 187. während einer Sec. H. 193. durch ein rechtwinklichtes Dreieck, deſſen Spitze oben ſteht H. 196. deſſen Spitze unten ſteht H. 198. durch iedes Dreieck H. 201. durch ein regulâres Vieck E. 115. durch kreisförmige Oeſnungen H 204. 213 u zugehör. E. allgemeine Formel für die Ausübung auch in Fällen, wo die im Buch gegebene Formeln unbrauchbar werden E. 122.

Ausleerung eines Gefäſſes, aus dem Waſſer lauft H. 169. 172. wie dabei die Bernoulliſche Verſuche mit der Theorie übereintreffen H. 177. Sie geſchieht mit einer gleichformig verminderten Geſchwindigkeit H. 180. aus runden Gefäßen H. 184.

Axe, eines ſich drehenden Körpers M. 405. was ſie für Gewalt vom drehenden Körper leidet M. 406; 408; die zu beſtimmen, für welche das Moment der Trägheit ein Größtes oder Kleinſtes iſt M. 418. dergleichen giebt es in iedem Körper drei M. 424.

B

Baßin, ſeine Breite bei einem Gradirbau für eine gewiſſe Stärke des Windes der Sicherheit gemäß zu beſtimmen. E. 12.

Beſchleunigung ſ. Kraft.

Bewegung, überhaupt M. 1. abſolute M. 2. beſchleunigte M. 4. drehende M. 404. feſter Körper M. 387. fortgehende M. 405. freie und nicht freie M. 101. 167. die Bewegung zu beſtimmen, wenn die mittlere Richtung der Kräfte durch den Mittelpunkt der Trägheit geht M. 399. gleichförmige M. 4. gleichförmig beſchleunigte M. 21. gleichförmig verminderte M. 27. krummlinigte M. 94. wie die Gröſſe der Bewegung zu beurtheilen iſt M. 292. die Gröſſe der Bewegung bleibt nicht, wie Cartes meint, immer einerlei M. 321. aber doch in gewiſſer Bedeutung M. 327. Mittheilung der Bewegung M. 305. Bewegung durch den Stos hervorgebracht ſ. Stos. veränderte 4.

C.

Canal, horizontaler H. 264. 270. Austheilung des Waſſers aus horizontalen Canälen H. 309; 310.

Cataracte des Newtons H. 308; 764.

Celeritas reſpectiva M. 324.

Centralkraft M. 54. ihr Einfluß auf die Bewegung ſolcher Körper, die nach gewiſſen Richtungen geworfen werden M. 117. wenn ſich die anziehende Kraft verkehrt wie das Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt verhält M. 130. da iſt die Bahn des Körpers allemal ein Kegelſchnitt M. 135. 152. wie Centralkräfte Körper durch eine Spirale treiben M 161. in einer endlichen Zeit durch unendliche Umwindungen M. 162.

Centrum virium M. 54.

Curva iſochrona paracentrica ſ. acceſſus & receſſus aequabilis M. 166. ſ. linea.

Cycloide, wie ſie erzeugt wird M. 3. ihr Gebrauch beim Pendel M 213, 214.

D.

Damm, wie er vom Waſſer gedruckt wird H. 40. wie er angelegt werden muß, wenn er hinlänglichen Widerſtand leiſten ſoll. E. 77.

Donau, wieviel Waſſer ſolche in jeder Sec. liefert H. 268.

Dornwand, auf Gradirhäuſern, in was für einer krummen Linie die Tropfen von ihr durch den Wind hinweggeweht werden E. 12.

Druck, wie er vom Stos unterſchieden iſt M. 346. u. f durch die Schwungkraft verurſacht M. 168. eines Körpers auf die krumme Linie, in der er ſich bewegt M. 175. 177. des Waſſers auf ein Rechteck H. 9; 26; auf ein Dreieck, deſſen Spitze unten ſteht H. 12; 13 deſſen Spitze oben ſteht E. 70. auf Kreisflächen H. 14. 19. auf die Wände eines ſchiefgeſtellten prismatiſchen Gefäſſes H. 30. auf die Fläche eines ſenkrechten Cylinders H 32. eines abgekürzten Kegels H. 33. eines ganzen Kegels H 34. auf die Fläche eines Kugelabſchnittes H 35. auf den Boden eines Gefäſſes während es aus einer Oefnung deſſelben herauslauft H. 544. wie ihn Hr. Karſten beſtimmt E. 200. und wie Bernoulli? H. 547. flieſenden Waſſers auf die Seite des Kanals H. 609. auf einen Damm ſ. Damm

Druckwerke, ihre Theorie, H. 668. hierhergehörige Hauptaufgabe H. 733. Allgemeine Regeln zu Anlegung eines Druckwerks E. 259 und 262. Vereinbarte Saug- und Druckwerke E. 265. wieviel Waſſer ſich dadurch in gegebener Zeit auffördern läßt. E. 266. no. 35. Solches vortheilhaft anzulegen 267.

Dynamik, ihr Unterſchied von der Phoronomie M. 11.

E.

Elaſtiſche Körper M. 291. ihr Verhalten beim Stoſe M. 312. 324.

Erde, ihre Bewegung M. 2.

Evolute, dient Körper durch vorgeſchriebene Wege zu bewegen M. 172.

F

Fall, eines Körpers in einer Sec. M. 206. des Waſſers ſ Waſſerſtrahl.

Federhart ſ. Elaſtiſch.

Felgen E. 175.

Fluß, in jedem fließt durch alle Querſchnitte bei ungeändertem Zuſtand in einerlei Zeit einerlei Waſſermenge H. 240. Geſchwindigkeit der Flüße H. 243. 248. von ihrer Waſſermenge H. 249. 253. wie ſich die Geſchwindigkeit an ſeiner Oberfläche und in der Tiefe immer mehr und mehr der Verhältnis der Gleichheit nähert H. 254. Formeln für die Geſchwindigkeit, wenn ſolche blos von der Waſſerhöhe oder des Flußes Tiefe herrührt H. 258. 261. Praktiſche Arten, die Geſchwindigkeit der Flüße zu meſſen 1.) durch ein in den Fluß geworfenes Körpergen von Holz oder Wachs oder etwas dergleichen leichtes H. 270.

2.)

2.) durch ein Pendel H. 271. allgemeine dahingehörige Formei H. 284. 3.) dadurch daß man erſt beobachtet, wie hoch der Fluß ein Pendel hebt, und nachher eben das Pendel ſo geſchwind in einem ruhig ſtehenden Waſſer bewegt, daß es vom Widerſtand des Waſſers ebenſo hoch gehoben wird H. 287. 4.) durch ein mit einer Oefnung verſehenes unter das Waſſer geſetztes Behältnis H 291. 5.) durch eine zweifchenklichte trompetenförmige mit ihrer weitern Oefnung dem Strohm entgegengeſetzte Röhre H. 292. 6.) durch den Reguiator oder mit Kunſt erbauten Querſchnitt in den Fluß H. 302. Beweiß ſolcher Methoden H. 436, 437. Von vereinigten Flüſſen H. 312. u. zugehör E.

Franzos, mit dem Engländer und Teutſchen verglichen E 60.

Friktion, wie ſolche der Bewegung eines auf einer Ebene fortgehenden Körpers hinderlich fällt M. 280. Methode, die Gröſe der Fr. ziemlich genau zu beſtimmen M. 282. eine andere M. 283. u. f eine dritte M. 286. überhaupt läßt ſie ſich nicht völlig allgemein feſtſetzen M. 288. ihre Berechnung bei einem Rad M. 287. bei einem Kunſtgeſtänge E. 354. X.

Futtermauern, wie ſolche gehörig anzulegen ſind. E. 78.

G.

Geſchwindigkeit, ihre Verhältnis bei gleichförmiger Bewegung M. 5. allgemeine Formei zwiſchen Zeit, Raum und Geſchwindigkeit M. 9. dergleichen für die gleichförmig beſchleunigte Bewegung M. 21. 26. ihre Aenderung durch eine unendlich kleine Zeit M. 50 und 51. Geſchwindigkeit eines Körpers in einer krummen Linie M. 174, 176. wie bei Maſchinen die Geſchwindigkeit mit Kraft und Laſt zuſammenhängen M. 270 und E. 60. Ein Fall, wo ſie am größten wird M. 258. der Menſchen und Thiere E. 60. des aus einem Gefäß ſpringenden Waſſers H. 83. wie ſolche bei Verſuchen mit der Waſſerhöhe zuſammenhängt, wenn die Oefnung ſehr klein iſt H. 85. 101 und 159. mittiere Geſchwindigkeit H. 189, 193 I. des aus einem Prisma laufend n Waſſers, wie ſich ſolche nach und nach ändert H. 455. wie ſolche mit der Waſſerhöhe zuſammenhängt, die Oefnung mag groß oder klein ſein H. 459, 461. wie ſie mit der Zeit zuſammenhängt, die Oefnung mag groß oder klein ſein H. 467. wenn die Oefnung ſehr klein iſt, H. 169. Geſchwindigkeit des blos trägen Waſſers in einer Röhre, wenn ſolches mittelſt eines Kolbens niedergetrieben wird H. 479. gilt ebenſo vom ſchwerem Waſſer H. 481. wie ſie mit der Waſſerhöhe zuſammenhängt, wenn ſich eine Röhre an dem Gefäß befindet und Gefäße mit der Röhre immer voll bleiben H. 484. für eine horizontale Röhre H. 490. für ein Gefäß mit einer Röhre, das ſich ausleeret H. 496. die hierhergehörige Integralgleichung für die Höhe, welche der Geſchwindigkeit zugehört H. 511. für ein Gefäß ohne Röhre H 513 durch ein Beiſpiel erläutert H. 519. für ein weites Gefäß mit einer engen Röhre H. 522. 530 für ein Gefäß mit einer engen horizontalen Röhre H. 532. auch für Röhren, die nicht horizontal ſind H. 535. wenn an eine Röhre wieder eine Röhre angeſetzt iſt H. 536. wie die Geſchwindigkeit durch die Richtung des ein- und ausflieſenden Waſſers geändert wird H. 602. der Flüſſe ſ. Fluß und Teßino.

Gradirung, allgemeine Formei für Waſſer- und Tritträder zu Betreibung der Gradirung E. 347. ihre Anzahi ſo zu beſtimmen, daß gegebene Bewegungskräfte zu ihrer völligen Betreibung hinreichen E. 348. eine hierhergehörige Hauptanwendung E. 352. 355. Beſtimmung der Gradirung, die ſich mit gegebenen Bewegungskräften nicht nur für ſich gehörig betreiben ſondern auch mit der nöthigen Brunnenſoole beziehen läßt. E. 359.

Grundkännel, wie die durch ſie fortflieſende Waſſermenge iedesmal zu beſtimmen iſt. E. 121.

H.

Harte Körper M. 291. hängen mit der unendlichen Theilbarkeit der Körper zuſammen M. 351. Geſetze des Stoſes für ſie ſ. Stos.
Haupeaxe, M. 423. ieder Körper hat deren drei M. 424.
Heber, wie Herr Hollmann ſein Flieſen erkläret E. 101.

J.

Integrirung von $\frac{x^n dx}{\sqrt{(bx - x^2)}}$ M. 193.

von $\frac{dx}{\sqrt{\left((b-x)\cdot(2ax-x^2)\right)}}$ M. 197.

K.

Kaſtenkunſt, E 72. I. — V.
Kies E. 175.
Klappe E 232.
Kolbenſpiel, Formel für die Zeit eines Kolbenſpiels E. 244. Regel für die Ausübung E. 271. Seine Höhe E. 274. III.
Kolbenſtück E. 232.
Kraft, von Thieren und Menſchen E 60. abſolute und relative M 15. bewegende M. 30. beſchleunigende M. 31. lebendige und todte ſind ganz heterogen M. 347. Erhaltung der lebendigen Kräfte M 375. Geſetz dieſer Erhaltung auf die Erfindung des Mittelpunkts des Schwungs angewandt M 377. hat in der Mechanik einen ausgebreiteten Nutzen M. 380. welche das Waſſer, welches aus der Oefnung eines Gefäßes lauft, treibt H 455. 549. bewegende zum Uebergang H. 472. bei einer Röhre H 476. hydrauliſche H. 580. hydroſtatiſche ebendaſ.
Kropfſchaufel E. 175.
Krummzapfen, E. 175.

L.

Ladung, ſolche bei einem Geſchütz zu beſtimmen M. 116. E. 24. wie aus ihr der Winkel beſtimmt wird, unter dem man eine Kugel abwerfen muß ebend.
Laſche E. 175.
Laſt, wie ſolche am ſchnellſten bewegt wird M. 258.
Lauf der Flüſſe H. 236. ſ. Fluß.
Leckſchaufel E. 370.
Linea brachyſtochrona M. 215. tautochrona M 210.
Luft, vermindert die Gewalt der Waſſerräder E. 287.

M.

Maas, der Kräfte M. 368. das Leibnizi-ſche M. 369. das Carteſianiſche M. 370. Streit und Schriften über beide Maaſe M. 369 - 374. Hrn H. Käſtners Gedanken darüber M. 374.
Maſchine, wie ihr Gang durch die Verſchiedenheit der Kraft oder Laſt abgeändert wird E. 60. Segneriſche H. 748. Waſſerſäulenmaſchine ſ. unten.
Mittelpunkt, der Kräfte M. 54. des Schwungs M. 223, 377. ihn für einen runden Körper zu finden M. 237. für ein ſchmales und dünnes Prisma M 242. Anwendung auf die Pendelſtangen in den Uhren M. 243. für ein zuſammengeſetztes Pendel M. 247. des Stoſes M. 279. der Maſſe, Trägheit M. 290. des Drucks H 20. ihn allgemein zu beſtimmen H. 23. bei einem Rechteck H. 24. der Geſchwindigkeit H. 189.
Mittheilung, der Bewegung M. 305. der Geſchwindigkeit M. 332.
Mittlerer Zuſtand M. 355.
Momene, der ſtoſenden Kraft, der Wirkung des Stoſes, des Triebs H. 365. der Trägheit M. 221. 410. eines ſenkrechten

ten Cylinders M 265. eines Mühlrads M. 267. aus dem für eine Axe das für eine andere mit jener parallelen Axe zu finden M. 411. es für eine durch den Mittelpunkt der Trägheit gehende Axe zu bestimmen M. 412.
Motus oscillatorius M. 191.
Mühlzapfen E. 175.

N.

Normalkraft M. 98. 389. wie sie die Bewegung ändert M. 99 wie sie den Druck eines Körpers bestimmt M 169.

O.

Oberschlächtig s. Wasserrad.
Oscillatio M. 192.

P.

Parabel, ist die Bahn schief geworfener Körper, wenn sonst kein Widerstand da wäre M. 108. 109. parabolische Theorie M. 111. 116.
Paternosterwerk E. 72. VI.
Pendel, die Lehre davon M. 179. 210. Länge des Secundenpendels bei uns M. 206. in der Sonne M. 209. einfaches und zusammengesetztes M. 223. Länge des einfachen, das sich wie eine Ebene schwingt M 226. Pendelstange M 243. Pendeluhren, Aenderung ihres Ganges im Sommer und Winter E. 51. solche, bei denen das Pendel in einer Rundung herumgeht M. 216.
Phoronomie s Dynamik.
Planeten, werden von der Sonne in dem verkehrten Verhältnis der Quadrate ihrer Entfernung von derselben angezogen M. 148.
Pole, bewegter Körper M. 405.
Pöschelwerk, vertikales E. 72. VIII. schiefliegendes das. XIII
Pumbenhub s. Kolbenspiel.

Q.

Quelle, wie sie visirt werden H. 330.
Querschnitt, der natürliche bei Flüssen H. 236. der künstliche H. 237. theoretische Untersuchungen darüber H. 303. 307.

R.

Rammaschine E 60.
Raum, der absolute, relative 2 s. Zeit.
Reflexion bewegter Körper, die an unbewegliche Hindernisse stosen M. 340.
Reiben, des Wassers H. 217. Eulers Betrachtungen darüber H. 226. Silberschlags Meinung E. 123. s. Friktion.
Reservoir, wie solches auf Salzwerken anzulegen E. 78.
Richtung, eines bewegten Körpers M. 3. Grösse derselben M. 327.
Riegelschaufel E. 175.
Röhre, wie ihr Zusammenhang dem Zerreisen widersteht H 46. Wie fest sie sein muß, wenn sie bei einer Gewalt, die sie zu zersprengen strebt, nicht bersten soll H. 47. 49. dabei zum Grund gelegte Erfahrungen E. 83. daraus gefolgerte allgemeine Formeln für die hölzernen und metallenen Rohren E. 86. wenn sie an Oefnungen von Gefäßen angebracht werden, denen sie zur Beschleunigung des auslaufenden Wassers H. 173. 179. besonders wenn sich die Röhre nach aussen zu trompetenförmig erweitert H 182. Bewegung des Wassers durch Röhren H. 558.
Rosenkranzmühle E. 72. VI.
Ruhewinkel E. 283.

S.

Salz, wieviel sich auf einem Salzwerk aus einer gewissen Menge Soole erwarten läßt E. 335 wieviel sich von einem gegebenen Gradirbau bei gegebener Höhigkeit der Brunnensoole erwarten läßt E. 344.
Salzbrunnen, seine Reichhaltigkeit zu bestimmen s. Quellen die zu seiner Beziehung nöthigen Bewegungskräfte gehörig zu bestimmen und anzuordnen. E. 337.

Saugröhre, E. 232. Tafel zu Beſtimmung ihrer Weite E. 350.
Saugwerk, E. 231. ſeine verſchiedene Arten E. 233. wie es vortheilhaft anzulegen E. 264. vereinbarte Saug- und Druckwerke ſ. Druckwerck.
Scala, temporum, velocitatum M. 11.
Schädlicher Raum E. 232.
Schaufeln ſ. Waſſerrad.
Schwere, M. 17. allgemeine Eigenſchaft derſelben M. 46. Verhältnis der Räume, die Körper von verſchiedenen Schweren getrieben durchlaufen, M. 48.
Schwerpunkt, ihn bei iedem Körper zu finden M. 395. ſeine Bewegung zu beſtimmen M 324. ſein Zuſtand wird durch den Stos nicht geändert M. 326.
Schutzbret, von der erfoderlichen Gewalt ſolches aufzuziehen H. 36. wie hoch man ſolches aufziehen müſſe, um eine verlangte Waſſermenge durchflieſen zu laſſen E. 107. allgemeine Formel für die Geſchwindigkeit, mit der es niederfällt E. 76.
Schwung M 192. nach der Seite M. 235. nach der Fläche daſ
Schwungbewegung M. 191.
Schwungkraft M. 98. 168. 389. 390. Hauptlehren davon M. 179. u. f. dient die Verrückung der Aren der Planetenbahnen ſinnlich zu machen M. 185. ſ. oberſchlächtige Waſſerräder.
Schwungrad oder Schwungkolben, wie ſolche beim Maſchinenweſen zu gebrauchen E. 58.
Segneriſche Hydrauliſche Maſchine H. 748.
Sonne, ihre anziehende Kraft oder Schwere mit der unſrigen verglichen M. 155. 158. ihre Weite von der Erde M. 156. ihre Maſſe mit der Erdmaſſe verglichen, M. 159. beider Dichtigkeiten verglichen M. 160.
Soole, wie ſie verdunſtet E. 339. wieviel auf einen Gradirbau erfodert wird E. 342. 343.
Soolenbehälter ſ. Reſervoir.
Spahrſamkeit, Geſetz derſelben M. 384. hat einen Streit zwiſchen Maupertuis und König veranlaßt M. 385.
Spirale, wenn Körper durch logarithmiſche oder hyperboliſche getrieben werden M. 161.
Steigen, des Waſſers ſ. Waſſerſtrahl.
Stetigkeit, Geſetz derſelben M. 350. findet bei harten Körpern nicht ſtatt M. 351. was überhaupt von deſſen Allgemeinheit zu urtheilen ſei M. 353. u. f. Anwendung dieſes Geſetzes bei Verſuchen M. 364.
Stiefel E. 232. Verhältnis ſeiner Weite zur Weite der Saugröhre E. 251. no. 12. ſ. Saugröhre.
Stos, gerader und ſchiefer M. 289. 338. allgemeines Geſetz deſſelben für harte Körper M. 293. 296. bei elaſtiſchen M. 312. 324. Vier Hauptgeſetze des Stoſes M. 319. 320. dergleichen Geſetze aus dem Satz der kleinſten Wirkung hergeleitet, für harte Körper M. 382. für elaſtiſche M. 383. Stos mit dem Druck verglichen M. 344. Er ändert die Summen der Produkte aus dem Quadrat der Geſchwindigkeit mehrerer Körper in ihre Maſſen nicht M. 330. des Waſſers, verhält ſich wie das Quadrat der Geſchwindigkeit H. 318. wie ſich ſolches durch Verſuche beweiſen läßt H. 321. wie er ſich mit einer Waſſerſäule, deren Grundfläche die Fläche iſt, welche geſtoſen wird, vergleichen läßt H. 325. Bernoullis hierhergehörige theoretiſche Unterſuchung H. 327 - 329. noch andere hierhergehörige Theorien H. 330. allgemeine Formel für den Stos E. 153. hierhergehörige Verſuche H. 331 - 334. Stos eines Fluſſes gegen ein ihm gerad entgegengeſetztes Bret H. 335. Vom ſchiefen Stos H. 336. ſeine Verhältnis zum ſenkrechten H. 339. 340. auf runde Körper H. 434. auf bewegte Flächen H. 346.

Stoßschaufel E. 175.
Strebepfeiler ihre vortheilhafteſte Stellung H. 17.
Strudel H. 455. 472.
Summe der bewegenden Kräfte H. 443.

T.

Tangentialkraft M. 97. 170.
Taſchencalender, der Lauenburgiſche E. 54. no. 40.
Teich, ſeine Befeſtigung ſ. Damm und Futtermauer. wie groß er ſein muß, um eine gewiſſe Anzahl Gradirung eine gegebene Zeit hindurch bei beſtimmtem Gefälle betreiben zu können E. 363. Tafel für die verhältnismäßige Gröſſe und Lage E. 365.
Teſſino, die ungemeine Geſchwindigkeit dieſes Strohms H. 285.
Theilbarkeit der Körper, unendliche M. 352.
Theilkiß E. 175.
Trägheit M. 12. iſt keine beſondere Kraft daſ. ein allgemeines Merkmal der Materie M. 13. äuſſert ſich bei Verſuchen M. 364.
Trittrad E. 313. Regel für ſeine Höhe auf Salzwerken E. 322. IX. wieviel ſich mittelſt eines Trittrades wältigen läßt E. 321. es gehörig anzulegen E. 326. 367. vollſtändige Beſchreibung E. 369.

U.

Uebertragen der Bewegungskräfte H. 440.
Ueberwucht, M. 250. wie für ſie die wirkliche Bewegungen berechnet werden M. 271. 278.
Umlaufszeit M. 136. für die himmliſchen Körper in Secunden zu finden M. 152. aus den Umlaufszeiten die Stärke der anziehenden Kräfte zu beſtimmen M. 153.

V.

Ventil E. 232.
Verlaſchung E. 175.
Vis centrifuga M. 98.

W.

Warze E. 175.
Waſſerleitung der Römer H. 310. no XI.
Waſſermenge, ihre Verhältnis zur Waſſerhöhe H. 101. ihre Verhältnis beim Ausfluß aus ungleichen Oeffnungen des Gefäſſes in ungleichen Zeiten H. 108. Polenis hierhergehörige Verſuche H. 122. u. f. hierhergehörige Formeln H. 166. 172. die in einer Sec. durch ein Rechteck fließt H. 193. wird durch eine Parabel beſtimmt H 194. ſ. Ausfluß.
Waſſerrad, das unterſchlächtige H. 351. wonach ſeine Wirkung zu ſchätzen H. 353. ſolche durch eine allgemeine Formel zu beſtimmen H. 355. den vortheilhafteſten Gang dieſes Rades bei ieder Lage der Schaufeln zu beſtimmen H. 356. bei der vortheilhafteſten Lage der Schaufeln H. 362. Beſtimmung der Zeit, in der das Rad einmal herumkommt H. 370. allgemeine Regeln zur Erhaltung des gröſten Effekts 371. verſchiedene die Bewegung des Rades bei ieder gegebenen Laſt betreffende Formeln H. 372. 379. angeſtellte Vergleichung verſchiedener Effekte bei einer Mühle H. 380. Vorſchläge zu Verbeſſerungen H. 381. von ſeinen Schaufeln E. 166. das oberſchlächtige H. 389. das ſtatiſche Moment des in den Schaufeln liegenden Waſſers zu finden H. 392. das Moment der Wirkung H. 396. nähere Unterſuchung ſeines Effekts 400. Vergleichung der Effekte verſchiedener Räder H. 408. Betrachtungen über ſeine Schaufeln H. 409. u. f. über die dem Waſſer in den Schaufeln mitgetheilte Schwungkraft H 418. u. f die Stelle zu finden, wo das Waſſer blos wegen der Lage der Schaufeln verſchüttet zu werden anfängt H. 417. wegen der Schwungkraft

kraft H. 427. durch Beiſpiele erläutert H 431. ihr ganzer Bau E. 175 u. 370. das halboberſchlächtige H. 401.
Waſſerſtrahl, wie er eine Parabel bildet H. 82. Durchmeſſer des zuſammengezogenen H. 115. u. 142. er ſteigt aus vielerlei Urſachen nicht zur Höhe, die ſeinem Fall gemäß iſt H. 224. Mariottes Verſuche hierüber H. 227. Mariottes Regel H. 230. daraus hergeleitete allgemeine Formel für die Höhe des aufſteigenden Strahls H. 234. I. und zugehör. E. darauf gegründete Tafel E. ebend.
Waſſerſäulenmaſchine E. 370.
Waſſerubren E. 92. und 105.
Wellbaum, wie er verfertigt wird E. 175.
Wellzapfen E 175. verändert wegen ſeiner Dicke das Moment der Laſt E. 277.
Widerſtand der Luft, durch ein Beiſpiel erläutert E. 16. ändert die Geſetze fallender Körper M. 30. ein leidender M. 37. Geſetz des Widerſtandes M. 65. Exponent deſſelben daſ. Wie durch ihn die Bewegung eines durch eine Materie ſich bewegenden Körpers beſtimmt wird, M. 69. und die erfoderliche Zeit M. 72.
Wind, deſſen Wirkung auf Windmühlenflügel mit der Schwere verglichen M. 398. ſeine Stärke zu meſſen H. 296. ſeine Wirkung auf fallende Tropfen E. 12. Windmühlen E. 370.
Wirbel H. 455.
Wirkung und Gegenwirkung M. 302. Gröſſe derſelben M. 381. Satz der kleinſten Wirkung M. 382. dient, die Geſetze des Stoſes zu beſtimmen, bei harten Körpern M. 382. bei elaſtiſchen M. 383.

Z.

Zeit, Gleichung zwiſchen ihr und dem durchloſſenen Raum M. 53. 60. 72. 81. 87. 89. 119. 177. 199. 271.

Digitized by Google

Alphabetiſches Verzeichnis
derer in der höhern Mechanik und Hydrodinamik vorkommenden Schriftſteller.

A.

D'Alembert M. 51. 289. 327. 380. H. 173. 330. 556. 759. 765.
Alexander M 214.
Amarus a lapide (Herberſtein) M. 109.
Amontons M. 282. 288.
d'Arcy M. 386.
Arnold M 373.
Aubert H. 319. 651.

B.

Balaſſi M. 373.
Baliano H. 93.
Barattini H. 93.
Barrow M. 361.
Beguelin M. 352.
Belidor M. 110. 289. H. 38. 39. 153. 183. 193. 206. 215. 219. 292. 335. 364. 388.
Bernoulli (Dan.) M. 51. 290. 381. H. 50. 59. 69. 73. 75. 91. 142. 156. 177. 296. 326. 327. 328. 330. 518. 556. 628. 643. 648.
— (Jac.) M. 241.
— (Joh.) M. 120. 151. 152. 161. 185. 190. 210. 242. 279. 327. 337. 358. 372. 379. 380. 381. H. 439. 546. 737. 764.
Bilfinger M. 284. 372.
Bion H. 302.
Birnbaum M. 109.
Bleiswyk H. 42.
Blondel M. 109.
Borlach M. 273.
Boſcowich M. 353.
Boterus H. 268.
Bouguer M. 208.
Bramhs H. 42.
Bruguan M. 386.

C.

Camus M. 288. 344.
des Cartes M. 52. 279. 321. 370.
Caſtelli H. 92. 302.
Celſius H. 380.
Ceva H. 123.
Cadwallader Colden M. 15.
Chatelet M. 373.
Condamine M. 208.
Cruſe H. 92. 163.

D.

Daniel M. 321.
Deſaguliers M. 280.

E.

Ehrenſverd M. 109.
Elvius H. 283. 352. 372. 402. 437.
Eſchinardo H. 93.
Euler (Leonh.) M. 51. 59. 63. 64. 87. 92. 94. 109. 153. 158. 159. 161. 185. 206. 207. 208. 209. 215. 265. 286. 287. 349. 350. 352. 386. 387. 388. 399. 410. 424. H. 72. 218. 226. 328. 647. 668. u. f. 750.
— (Alb.) H. 343. 365. 381. 387. 388.

F.

Fabretti H. 92.
Fontana H. 310.
Frontinus H. 310.

G.

Galiläus M. 26. 64. H. 92.
Gottſchedin M. 373.
Grandi H. 195. 222. 253. 270. 285. 291. 307.

Graveſand M. 307. H. 82. 131. 182. 221. 329.
Guilelmini H. 93. 94. 194. 236. 268. 282. 300. 302. 308.

H.

Haller M. 356.
Halley M. 109. H. 647. du Hamel H. 325.
Hauſen M. 361. 373. 374. H. 648. X.
Heinſius M. 373.
Henning (Graf von Grävenitz) M. 110.
Herberſtein M. 109.
Hermann M. 11. H. 78. 93. 260. 263. 756.
de la Hire H. 285. 323.
Hube H. 44.
Huetius H. 296.
Huygens M. 179. 186. 190. 206. 207. 214. 216. 223. 241. 336. 337. 380.

J.

Jurin M. 372.

K.

Käſtner M. 363. H. 472.
Karſten M. 110.
Keil M. 120. 152. 179.
Kepler M. 148.
Kies H. 749.
König M. 290. 327. 385.
Kraft M. 289. H. 86. 333.

L.

de la Lande M. 249.
Mac Laurin M. 158. 362. H. 765.
Leibnitz M. 166. 216. 369. 370. 385.
Leupold H. 296. 388. 302. 392.
Ludolf M. 153. 206. 208.

M.

Maggioto H. 93.
Mairan M. 373.
Manfredi H. 157. 286. 290.
Mariotte M. 332. H. 56. 77. 103. 106. 109. 183. 185. 223. 227. 270.
Marinoni H. 146.
Mariſcotti M. 373.
Maupertuis M. 359. 381. 384. 385. 386.
Meinig H. 103.
Moivre M. 120.
Monanari H. 93.
Muſchenbröck M. 288. H. 74. 78.
Mylius M. 384.

N.

Newton M. 71. 120. 148. 151. 152. 155. 157. 158. 159. 304. 327. 351. 358. H. 142. 308. 437. 764.

P.

Parent M. 282. H. 364.
Pauton H. 319.
Pitot H. 292.
Poleni H. 92. 111. 116. 120. 127. 129. 131. 134. 604.

R.

Raccolta nuova &c. H. 92. 94. 111. 157. 286. 302.
Riccati M. 372.
Rivault M. 109.
Rivius M. 109.
Robins M. 59.
Römer H. 79.

S.

Schober M. 273.
Schwenter M. 305. 368.
Segner M. 424. H. 749. 758.
Stone M. 279.
Stübner M. 373.
Sturm M. 288.
Sully M. 216.

T.

Torricelli H. 93. 180.

V.

Varignon H. 93. 103.
Voltaire M. 385.

W.

Wallis M. 279.
Wargentin H. 352.
Windheim M. 374.
Winkler M. 364.
Welf M. 242. 372.

Z.

Zanotti M. 372.

Druckfehler in der Käſtneriſchen höhern Mechanik.

Seite	Zeile	
6	16	ſtatt Winkel lies Winkel bedeutet.
7	10	ſt. $\frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 7}$ l. $\frac{5 \cdot 3}{4 \cdot 7} \cdot c$
15	3	ſt. 1728 l. 1738.
17	14	ſtreiche man er mag weg.
21		letzte ſt. 33. l. 34.
36	18	ſt. Ausnahmen ſcheinen hievon l. Dinge ſcheinen hievon Ausnahmen.
52	18	ſt. 34 l. 35.
62	10	ſt. y^{-2} l. y^{-1}
70	19	ſt. $m = 2$ l. $m = 1$
73	17	ſt. $m = 2$ l. $m = 1$
75	23	ſt. dv l. Q · dv
76	4	ſt. dv l. Q · dv
	8	ſt. pdx + l. qdx +
78		letzte ſt. 422 l. 412
79	15	ſt. x : o l. x = o
80	20	ſt. x = o l. x = ∞
	25	ſt. k = ∝ l. k = ∞
83	4	ſt. $\sqrt{\frac{g}{k}}$ l. $\sqrt{\frac{k}{g}}$
	14	ſt. $1 - e^{x:k}$ l. $1 - e^{-x:k}$
85	14	ſt. 1 + y l. √(1 + y)
	17	ſt. $1 - \frac{1}{2}y$ l. $1 + \frac{1}{2}y$
		vorletzte ſt. $+ \frac{1}{3}w^2$ l. $1 + \frac{1}{3}w^2$
86	4	ſt. $e^{x:k}$ l. $e^{x:ak}$
	13	ſt. $- \frac{1}{2}u^3$ l. $- \frac{1}{2}u^2$
92	20	ſt. 149 l. 139.
94	4	nach Geſchwindigkeit ſetze man hinzu richte
99		vorletzte ſt. + Pdy l. ± Pdy
102	4	von unten ſt. $\frac{dds}{dx}$ l. $\frac{dds}{ds}$

Seite	Zeile	
103	11	von oben ſt. λc^2 l. $\lambda^2 c$
104	8	ſt. $\frac{\mu g x}{\lambda^2 c}$ l. $\frac{\mu g x}{\lambda c}$
108	15	ſt. ME l. QE
	16	ſt. $+ \frac{v}{g}$ l. $= \frac{v}{g}$
112	10	ſt. 181 l. 176
	3	von unten ſt. y l. η
	2	v. u. ſt. + √ l. ± √
113	5	v. u. ſt. 106 l. 116
114	1	ſt. 41275800 l. 41279800
121	3	v. u. ſt. die l. der
124	17	ſt. 202 IIII l. 202 III
125	9	ſt y^2u l. y^2du
	10	ſt. 202 IIII l. 202 III
126	10	ſt. iſt = l. iſt integrirt =
	18	ſt. $\frac{\lambda}{A}$ 𝔅 ſin Z l. λ · 𝔅 ſin $\frac{Z}{A}$
127	1, 22	ſt. $\frac{\lambda}{A}$ l. λ
	4, 5	ſt. Z l. $\frac{Z}{A}$
128	12	ſt. √(A² — Z²) : Z l. √(A² — Z²) : A
	17	ſt. $\frac{k}{2}$ · 11. $\frac{k}{2}$ · λ · 1
129	7	ſt. — uk² l. — u²k²
131	2	ſt. IIII l. III
132	3	ſt. 215 l. 218
134	16	ſt 202 II l. 202 I
135	16	ſt. als o l. als c
137	14	ſt. 219 l. 220
146	9	ſt. $\frac{s^2 v y^2}{a}$ l. $\frac{s^2 v y^2}{a^2}$

Druckfehler in der Käſtneriſchen höhern Mechanik.

Seite	Zeile	
147	4	ſt. $\sqrt{\left(-1\frac{L}{E}\right)}$ l. $\sqrt{\left(1-\frac{L}{E}\right)}$
160	15	ſt. 214 IIII l. 214 III
170	3 v. u.	ſt MN l. MO
		ſt. 44 l. 43
178		vorletzte ſt. 21 l. 20
181	6	ſt. den l. den halben
183	2	ſt. 2N l. QN
185	2	ſt. MN l. MH
	14	ſt. $\frac{2r^2}{a}$ l. $\frac{r^2}{2a}$
188	1	ſt. $-r^2$ l. $=r^2$
	4 v. u.	ſt XVII. l. XVI
200		ſt. 19. Fig. l. 21. Fig.
204	2	ſt 4. 4. 11. 10. l. 4. 8. 11. 10.
205	4	ſt. einem l seinem
	8	ſt dem l. alſo während dem
206		letzte ſt. 10 l. 09.
221	21	ſt. deſſen in A l. deſſen in B
229	15	ſt BQ l. BP
		1 ſetze man hinzu Fig. 26.

Seite	Zeile	
230	3 v. u.	ſt. EB l. ED
232		letzte ſt. 3r l. $3r^2$
243	5	ſt. $\frac{2}{3}B\cdot x^3$ l. $\frac{2}{3}x^2$
250		vorletzte ſt. dieſe l. ſich dieſe
251	9.	ſt. CA l. BA
256	2	ſt. a^2Q l. b^2Q
	23	ſt. $(p-\varphi)\cdot b$ l. $(p-\varphi)\cdot ab$
266	17	ſt. a^4, a^2 l. b^4, b^2.
287	2	ſt. $\mu : P$ l. $\mu \cdot P$
302	10	ſt. $c-x$ l. $C-x$
321	18	ſt. weniger l mehr
	19	ſt. mehr l. weniger
325	9	ſt. $C\cdot T+$ l. $C\cdot T-$
332	20	ſt. 2A l. 2Aa
333	3	ſt. $\frac{B}{A+C}$ l. $\frac{1}{A+C}$
335	8	ſt. $\frac{1}{1+n}$ l. $\frac{2}{1+n}$
	14	ſt. $r=1$ geſetzt l. $r=0$ geſetzt
338	15	ſt. BC l. BG
370	22	ſt. die l. wie
383	6	ſt. ſoviel l. ſoviel zu.

Druck-

Digitized by Google

Druckfehler in der Käſtneriſchen Hydrodinamik.

Seite Zeile

4 16 ſt. u. l. e.
11 3 von unten ſt. OLK l. OLR
13 3 ſt. $cf - h \cdot tang\, k$ l. $2h - f \cdot tang\, k$
28 4 ſt EH l. EB
20 ſt. Wie l. Weil
21 ſt. Cl l. CI
38 18 ſt. 3c l. 3cmal
39 4 ſt. Umfang l. Halbmeſſer
47 12 ſt. VIV l. VW
52 6 ſt. Fus l. Zoll
54 19 ſt. BH l. DH
66 5 ſt. bey ſo l. ſo bey
68 1 ſt. BH l. DH
75 11 ſt. gleichen Waſſerhöhen l. gleichen Oefnungen.
83 9, 10 von unten ſt. XI, XI, l. XI, XII, VIII, X. VIIII, X.
105 6 v. u. ſt. A l. a
107 10 ſt. noch nicht l. nur weniger gröſſer als
121 7 v. u. ſt. c; $c \cdot \frac{m}{n}$ l. c, $\frac{m}{n}$
122 5 ſt. $- \sqrt{c}$ l. $- \sqrt{b}$
2 v. u. ſt. e l. c
130 8 u. 9. ſt. + 1 l. − 1
139 4 ſt. PE l. BE
139 letzte, 140 1 ſt. $\sqrt{\frac{k}{e}}$ l. $\frac{k^2}{\sqrt{c}}$
3. ſt. $\frac{\pi}{2E} \cdot \sqrt{\frac{ka}{gh}} \cdot (c - x)$ l. $\frac{\pi k^2}{2E}\left(\sqrt{\frac{a}{ghc}}\right)(c - x)$
145 16 ſt. $b \cdot c$ l. $b \cdot c \cdot t$
19 ſt. $(a+)$ l. $(a + c)$
146 2 ſt. $c^{\frac{3}{2}}$ l. $a^{\frac{3}{2}}$
150 7 ſt. 284 l. 248 IIII

Seite Zeile

151 1 ſt. $15 \cdot e$ l. $15 \cdot c$
letzte ſt. $- 2a$ l. $- 2a^{\frac{c}{x}}$
154 3 v. u. ſt. $r \cdot \sqrt{r}$ l. $r^2\sqrt{r}$
155 7, 8 v. u. ſt. $\sqrt{gf}$ l. $2\sqrt{gf}$
162 13 ſt. $\sqrt{\frac{gk}{a+r}}$ l. $\sqrt{gk}$
166 13 ſt. Matriotte l. Mariotte
170 19 ſt. gey l. bey
174 3 ſt. VI VI. l. VI, VII.
177 16 ſt. $\sqrt{\frac{(H^2 + AD) - H}{2D}}$ l. $\frac{H \cdot \sqrt{(H^2 + 4AD)} - H}{2D}$
184 2 v. u. ſt. BZ l. BQ
190 4 v. u. ſt. $u\frac{16}{17}$ l. $u = \frac{16}{17}$
191 2 ſt. 265 l. 262
15 ſt. (266) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{61}{64} u^{\frac{3}{2}}$ l. (263) $= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{61}{64} \cdot u^{\frac{3}{2}}}{Cof\, \beta}$
192 4 v. u. ſt. abſchlieſen l. abſchieſen
198 1 ſt. mache l. mache man
2 ſt. andere l. Waſſer
199 letzte ſt. B l. AB
201 5 ſt $\frac{\sin \alpha}{Cof(\gamma+\delta)}$ l. $\frac{\sin \delta}{Cof\, \gamma+\delta)}$
12 ſt. Quadrante l. Quadrate
204 13 ſt. 4 l. 46
227 3 v u. ſt. $\sin(\frac{1}{2}\beta)^2$ l. $(\sin \frac{1}{2}\beta)^2$
233 5. v. u. ſt. XII. l. XI.
234 16 ſt. dem l. den
244 4 v. u. ſt. geachtet l. ohngeachtet
245 5. v. u. ſt. dieſer l. in dieſer
247 3 v. u. ſt. $u = \frac{2}{3}v = 11$ l. $u = \frac{2}{3}, v = 11\frac{2}{3}$
249 1 ſt. $S \cdot C \cdot f \cdot e$ l. $S, C + f, e$

Druckfehler aus der Käſtneriſchen Hydrodinamik.

Seite	Zeile	
252	17	ſt. mc l. me
253	10 u. 11	ſt. d l. D
259	24	ſt das Waſſer l. des Waſſers
270	11	ſt IIII l. III
271	5	ſt. der Höhe l. der Höhe v
	12	ſt. $-\sqrt{}$ l. $=\sqrt{}$
		letzte ſt. dieſe l dieſer
277	7	ſt. XIII. l. XIIII
	19	ſt. 324 l. 325
281	3	ſt. VIII l. VIIII
285	21	ſt. II l. III
287	19	ſt. dem l. den
289	18	ſt. VTL l. VTS
305	24	ſt enudatio l. enodatio
314	19	ſt. 254 l. 354
321	6	ſt. ſin δ l. ſin ϑ
351	4	ſt Mr l. MR
364	3	ſt. 404 l. 405
375	11	ſt 401 l. 400
377	18	ſt im l ein
382	2 v. u.	ſt ZS l. QS
386	5	ſt $l^2 \sin\varphi$ l. $l^2 \sin\varphi^2$
393	5	ſt. ſetzen l. ſein
395	6	ſt. 1,658 l. 1,656
399	15	ſt. 65,λλ l. 65,11
400	22	ſt. BC l. PM
414		die Seitenzahl muß 414 heiſen
	18	ſt HF l HI
415	18	ſt. (4) l. (442)
417	3	ſt. worden l. werden
424	1	ſt. PZ l PQ
425	1	ſt es es l. es
430	8	ſt. XIII. l. XII.
433	21	ſt. 489 l. 459
435	6, 12, 14	ſt. m« l. ma
446	14	ſt. fortgeſetzt l. nicht fortgeſetzt
455	5 v. u.	ſt. XVI l XIIII
462	1	ſt. Menner l. Zähler
464	15	ſt 501 l 502
465	2	ſt. $\frac{k : (k-1)}{x}$ l. $k \cdot \sqrt[k]{k}$
468	6	ſt. 522 l 523
469	3 v. u.	ſt. (k —) l. (k — 1)
472	9 u. 10	ſt. 501 l. 502

Seite	Zeile	
477	14	ſt. $\frac{h}{m} \cdot b$ l. $\frac{h}{m} \cdot mb$
481	4	ſt. 469 l. 468
		letzte ſt $\frac{E-1}{E-1}$ l. $\frac{E-1}{E+1}$
482	21	ſt. XV. l. XIIII
484	15	ſt. III l. 552
486	17	ſt. Unſuchung l. Unterſuchung Auch muß hier fig. 50 der rechte Winkel, wo die verlängerte A P C c einander begegnen, noch mit B bezeichnet werden.
487	5	ſt. Z l. Q
495	20	ſt. kann l. kam
511	3	ſt. die die Lage in es l. die Lage in die es
513	18	ſt. 472, 479 l. 572, 579
518	15	ſt. bis an R l. bis an R erhoben
	1	ſt. a^2y^2 l. α^2y^2
523	17	ſt. die l. der
		letzte ſt. $ah^2\omega$ l. $\alpha h^2\omega$
524		dritte v. u. ſt. $h - \omega^2$ l. $h^2 - \omega^2$
543	17	ſt. die l. der
546	7 v. u.	ſt. er l. nicht
560	14	ſt. den l. gegen
563	13	ſt. S l. f
569	2	ſt. Ha l. Ha^2
571	17	ſt. 681 l. 682
573	4	ſt. 684 l 685
574	5	ſt. $\left(-\frac{a^4}{c^4}\right)$ l. $\left(1-\frac{a^4}{c^4}\right)$
575		letzte ſt. $Br^{\frac{1}{2}}dr$ l. $Br^{\frac{1}{2}}dr$
578	7	ſt. Kolben l. Stiefel
579	1	ſt. X l. VIIII
	6 v. u.	ſt. 6 H · a^2 l. 12 Ha^2
581	10	ſt. $\sqrt{\frac{0}{\square}}$ l. $\sqrt{10}$
582	8	ſt. X l. VIIII
588		vorletzte ſt. $\sqrt{4 \cdot \frac{c}{4}}$ l. $\sqrt{\frac{c}{4}}$
594	19	ſt. wem l. wenn
595	16	ſt. 1,69 l. 0,0169
599	2 v. u.	ſt. 736 l. 733 II
614	12	ſt. als l. anſehn als.

Digitized by Google

Verzeichnis einiger Bücher

welche

die Richterische Buchhandlung

in Altenburg

auf eigne Koſten gedruckt hat.

Abhandlungen der holländiſchen Geſellſchaft der Wiſſenſchaften zu Harlem, 1ſter Th. mit Kupf. gr. 8. 1758. 1 Rthl. 8 Gr.

— — der königlichen Pariſer Akademie der Chirurgie, 5 Bände mit Kupfern 1754 — 81. gr. 4. 16 Rthl. 8 Gr.

— — hiſt. ſtatiſt. über Rußland, a. d. Fr. des Ritters d'Eon von Beaumont, 8. 1779. 1 Rthl 4 Gr.

hiſtor. Abriß von Indien, mit Kupf. 8. 1773. 14 Gr.

Alberti D. M. Iurisprudentia medica T. II. et III. 4. 2 Rthl. 12 Gr.

Anleitung zu einer beſſern Benutzung des Torfes, vorzüglich im Churfürſtenthum Sachſen, m. K. gr 8. 1780. 16 Gr.

Apuleji Phil. Madaurenſis Opera, 2 Volumina, 8. 1780. 2 Rthlr.

Betrachtungen über die neuſten hiſtoriſchen Schriften, 69-73. 5 Bände. 6 Rthlr. 6 Gr.

Beyträge zur Naturhiſtorie, ſonderlich des Mineralreichs, 2 Theile mit Kupf. gr. 8. 1774. 1 Rthlr. 6 Gr.

Briefe der Gräfin von la Riviere, an ihre Freundin die Baronnes von Neufpont, 2 Theile, 8. 1780. 1 Rthl 16 Gr.

— — litterariſche an das Publikum 3 Theile, 8. 1769-1774. 1 Rthlr. 12 Gr.

Caiſſe, des Abts, Reiſe nach dem Vorgebürge der guten Hofnung, nebſt dem Leben des Verfaſſers, m. K. 8. 1778. 16 Gr.

Caylus, Graf von, Abhandlung zur Geſchichte und zur Kunſt. Mit einer Vorrede des Hrn. geheimen Rath Klotz, 2 Bände, m. Kupf. gr. 4. 1768. 5 Rthl.

Commentarien, mediciniſche, von einer Geſellſchaft der Aerzte zu Edimburgh, 5 Bände 8. 1778-82. 5 Rthlr. 6 Gr.

Cruſii, Chriſt. Opuſcula ad hiſt. et humanitatis litteras ſpectantia, cum praef. Chr. Ad. Klotzii, 8. 176-. 1 Rthlr.

Delectus Diſſertat. Medicarum Ienenſium, collegit et praef. eſt D. C. G. Gruner, cum Fig. 4. 1779. 1 Rthlr. 12 Gr.

Demetrii de elocutione liber, graece et lat. curauit Ioh. G. Schneider 8. 1779. 14 Gr.

Ellers, J. Chr. Phyſiologie und Pathologie, vermehrt von D. Zimmermann, 2 Theile gr. 8. 1770. 1 Rthlr.

Florencourt, Abhandlungen aus der juriſtiſchen und politiſchen Rechenkunſt m. Kupf. 4. 1781. 1 Rthlr. 6 Gr.

Frankens, H. G. neue Beyträge zu der Geſchichte, Staats- Lehn- und Privat-Rechten der Lande des Chur- und Fürſtl. Hauſes Sachſens 1ſter Theil. gr. 8. 1767. 18 Gr.

Fus, Erläuterungen über die öffentlichen Anſtalten zum Beſten der Witwen ſowohl als der Sterbefälle, nebſt Beſchreibung einer neuen Art Tontine. Mit einer Einleitung von J. A Kritter, 4. 1782. 8 Gr.

Griesheim von, Verſuch einer neuen Brückenbauart, m. K. gr. 8. 1773. 6 Gr.

Gifani, Obert. Obſeruationes lat linguae ſingulares maiorem partem emendantis auctoribus cenſentur, augebat reliquae criticae item ſubinde ſpecimina dabat Enoc. Aug. Otho 8. 1762. 20 Gr.

Hardion

Hardion, heilige und weltliche Geſchichte, 18 Th. 8. 1760. 1774. 9 Rhlr. 4 Gr.

Käſtners, A. G. vollſtändiger Lehrbegriff der Optik, a. d. Engl. mit Aenderungen u. Zuſätzen, m. Kupf. gr. 4. 1755. 3 Rthlr. 8 Gr.

— — Vorleſungen in der königlichen deutſchen Geſellſchaft zu Göttingen, 2 Theile, gr. 8. 1768. 1773. 18 Gr.

Klotz, C. A. Beytrag zur Geſchichte des Geſchmacks und der Kunſt, aus Münzen 8. 1767. 8 Gr.

— — über den Nutzen und Gebrauch der alten geſchnittenen Steine und ihrer Abdrücke, gr. 8. 1768. 1 Rthlr. 4 Gr.

Kreiſig, G. C. Beyträge zur Hiſtorie der Chur- und Fürſtlichen Sächſiſchen Lande 6 Theile gr. 8. 1754. 1764. ieder Theil koſtet 18 Gr.

Kaeſtneri, A. G. Diſſertationes mathematicae et phyſicae quae Societ. regia ſcientiarum Gœttingenſi annis 1756-1767 exhibit 1771. 4. maj. 1 Rthlr. 12 Gr.

Klotzii Opuſcula varia, 8. maj. 1766. 20 Gr.

— — Acta litteraria, VII. Vol. 8. 1764. 1774. 7 Rthlr.

Kœcheri, I. Chr. Analecta philologica et exegetica in IV. S. S Euangeliſtas, quibus I. Chr. Wolfii Curae phil. et criticae ſupplentur atque augentur, 4. maj. 1766. 3 Rthlr. 18 Gr.

Lempe, Erläuterungen der Käſtnerſchen Anfangsgründe der Arithmetik, Geometrie ebenen und ſphäriſchen Trigonometrie, 3 Theile, m. K. 8. 1781. 3 Rthlr.

Lepechin, Iwan, Tagebuch der Reiſe durch verſchiedene Provinzen des Rußiſch. Reichs, in den Jahren 1768. 1769. und 1771. Aus dem Rußiſch. 3 Theile, mit Kupfern gr. 4. 1774. 1782. 6 Rthlr. 8 Gr.

Locke, J. Verſuch vom menſchlichen Verſtande, mit Anmerkungen von H. E. Pooley, gr. 4. 1757. 3 Rthlr. 8 Gr.

Lucas, C. Verſuch von Waſſern. Aus dem Engl. übers. 3 Theile gr. 8. 1767. 1769. 2 Rthlr. 4 Gr.

Mariti Reiſe nach Cypern, Syrien und Paläſtina, in einem freyen Auszuge aus dem Italieniſchen, gr. 8. mit einem gemahlten Kupf. 1777. 1 Rthlr. 16 Gr.

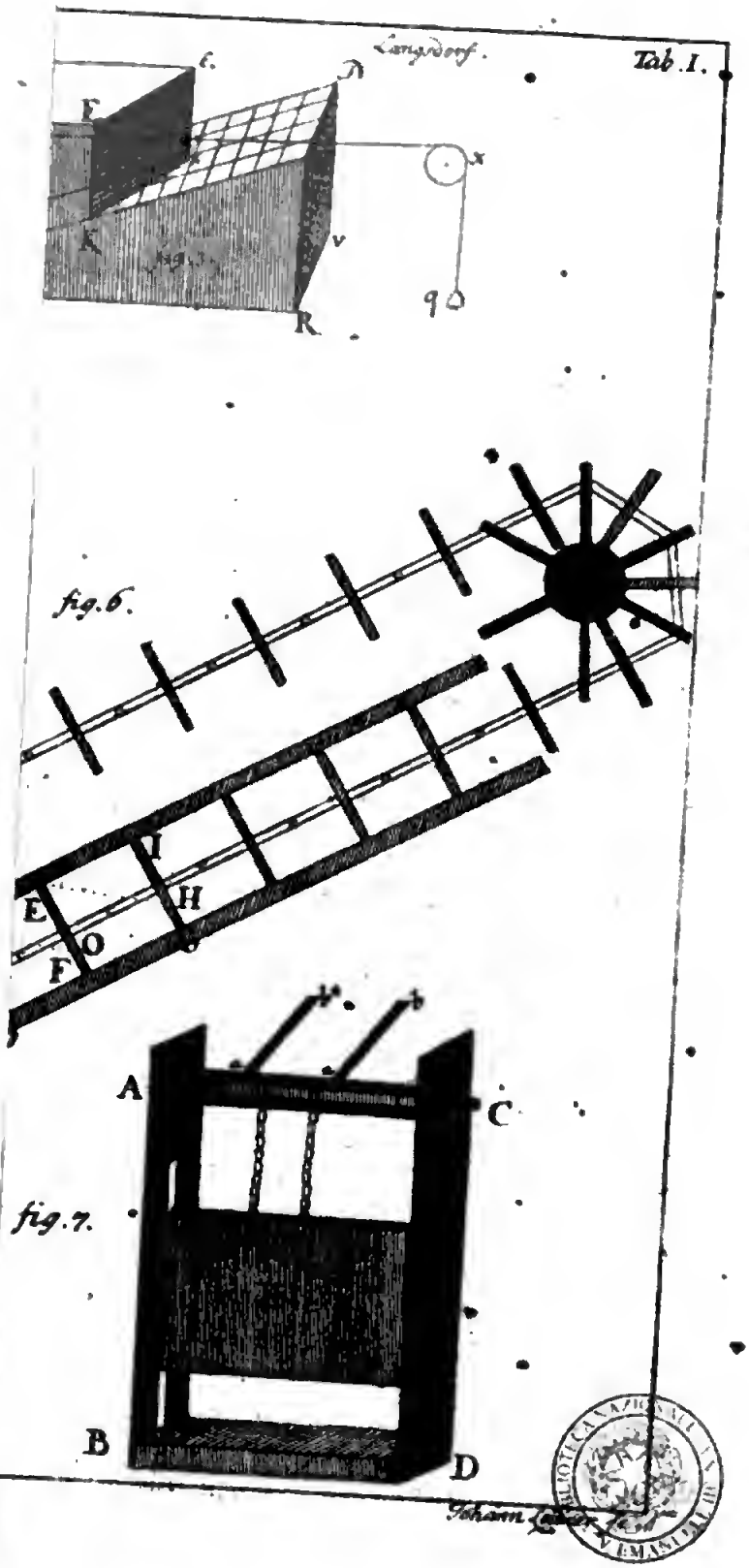
Nesbits, R. Oſteogenie, oder Abhandlung von der Erzeugung der Knochen im menſchlichen Körper, mit Herrn D. Chr. G Ludwigs Vorrede. Aus dem Engl. mit Kupf. gr. 4. 1753. 1 Rthlr.

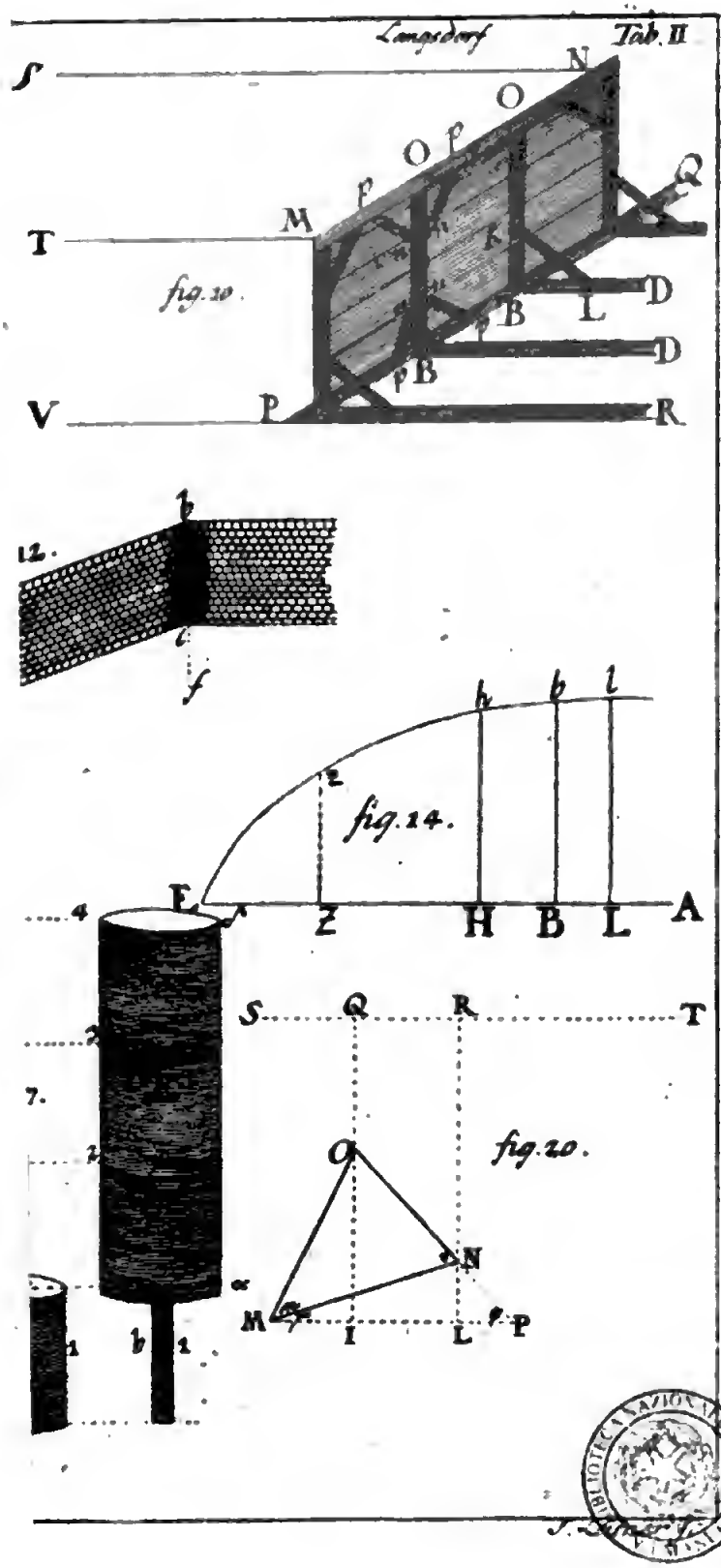
Reiſe eines franzöſiſchen Officiers nach der Inſel Frankreich und Bourbon, ꝛc. Aus dem Franzöſiſchen überſetzt, und mit einigen Anmerkungen eines Arztes verſehen, 2 Theile mit Kupf. gr. 8. 1774. 1 Rthlr. 16 Gr.

Schröter, J. Sam. vollſtändige Einleitung in die Kenntnis der Steine und Verſteinerungen, 4 Bände, gr. 4. mit Kupf. 1773. 1783.

della Torre, Geſchichte und Naturbegebenheiten des Veſuvs von den älteſten Zeiten bis zum Jahr 1779. gr. 8. 1783. m. K. 1 Rthlr. 4 Gr.

Digitized by Google


Tab. I.
E
K
R
V
fig. 6.
I
E
H
F
O
fig. 7.
A
C
B
D


Langsdorf
Tab. II
S
N
O
O
f
Q
T
M
f
k
D
fig. 10.
B
L
D
B
V
P
R
12.
b
c
f
b
b
l
fig. 14.
E
Z
H
B
L
A
4
S
Q
R
T
7.
fig. 20.
O
N
M
I
L
P
a
1
b
1

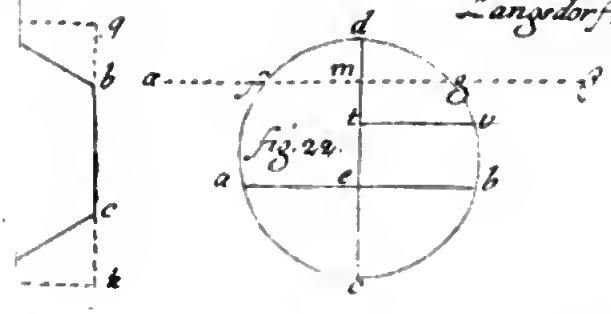


fig. 22.

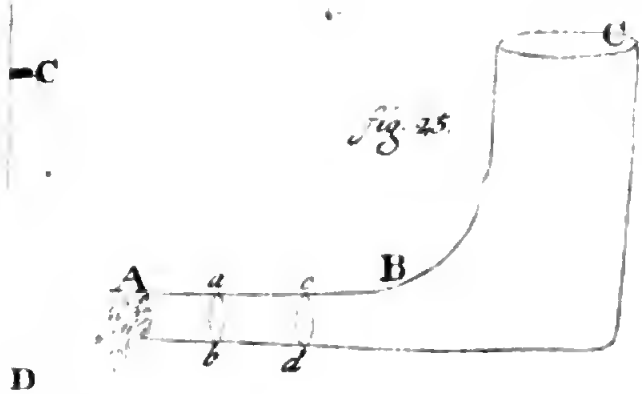


fig. 25.

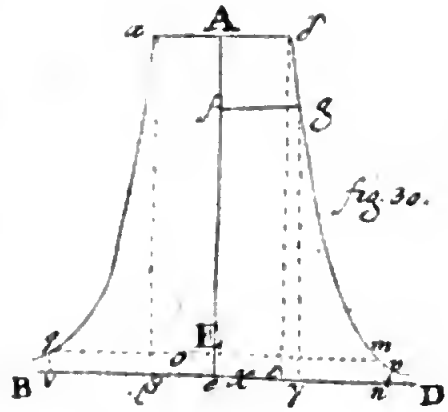
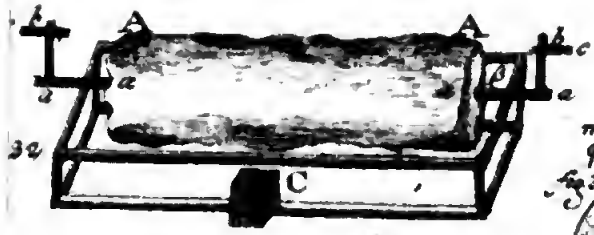


fig. 30.



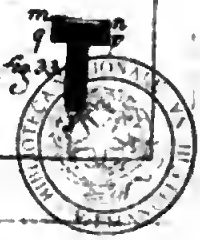


fig. 31.

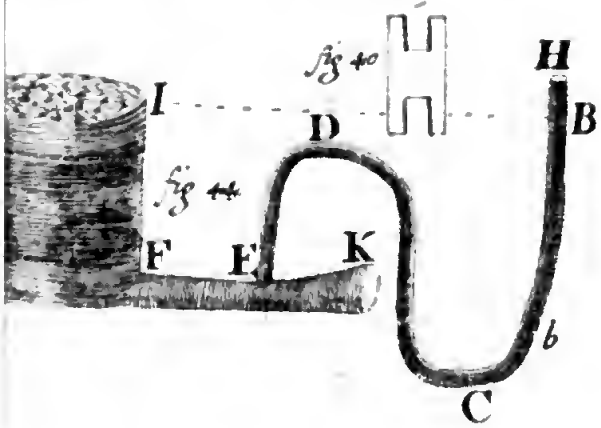
Digitized by Google

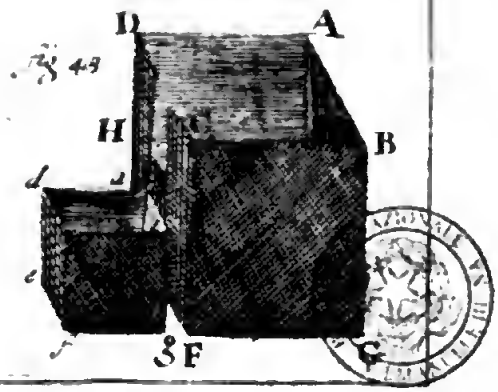
Digitized by Google

fig 39

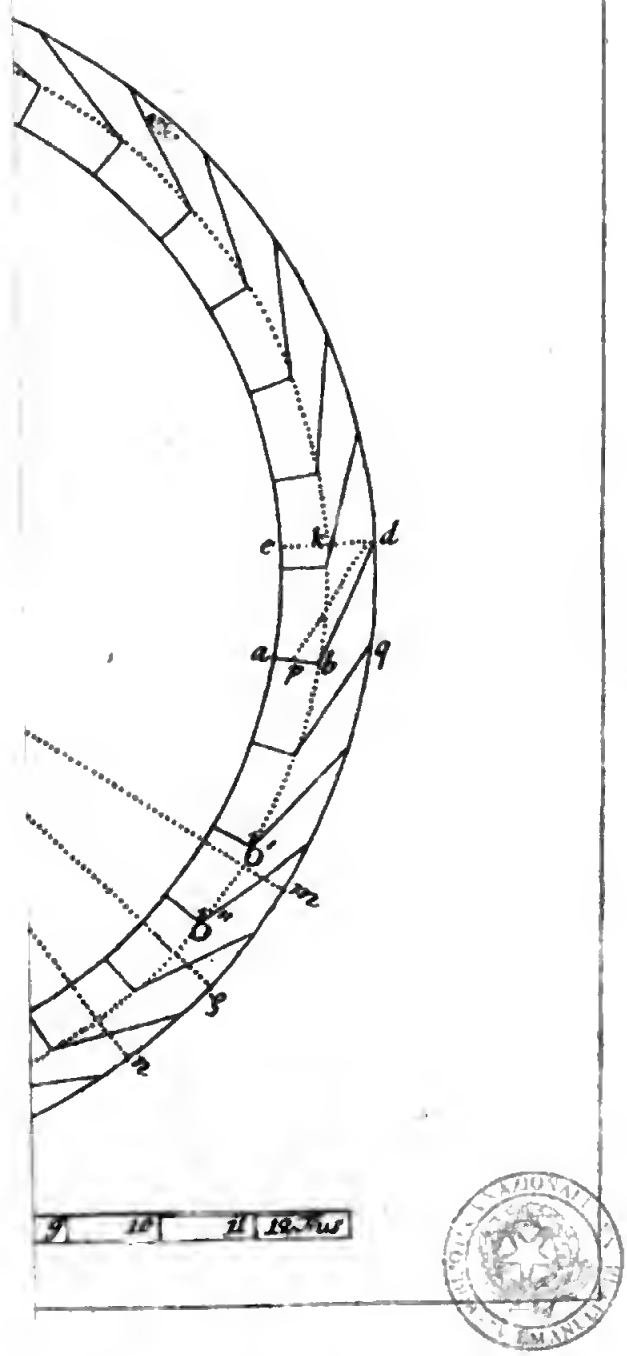
fig 41

fig 40





Langdorf Tab. V.



BIBLIOTECA NAZIONALE
VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Digitized by Google

187
13
10

Digitized by Google